Kapitola 4. Limity a spojitost reálných funkcí

4.1. Úvodní definice

Definice 4.1:
Funkce f je shora omezená na množině $M \subset R$, jestliže platí,že $\exists K \in R\ \forall x \in M : f(x) \leq K$ (tj. je-li množina $\{f(x); x \in M\}$ shora omezená).
Funkce f je zdola omezená na množině M, jestliže platí,že $\exists L \in R\ \forall x \in M : f(x) \geq K$ (tj. je-li množina $\{f(x); x \in M\}$ zdola omezená).
Funkce f je omezená na množině M, je-li současně shora omezená a zdola omezená na M.

Definice 4.2:
Funkce f je klesající na množině $M \subset R$, jestliže $\forall x, y \in M, x < y : f(x) > f(y)$.
Funkce f je rostoucí na množině M, jestliže $\forall x, y \in M, x < y : f(x) < f(y)$.
Funkce f je neklesající na množině M, jestliže $\forall x, y \in M, x < y : f(x) \leq f(y)$.
Funkce f je nerostoucí na množině M, jestliže $\forall x, y \in M, x < y : f(x) \geq f(y)$.
Funkce f je monotonní na M, jestliže je na M nerostoucí nebo neklesající.
Funkce f je ryze monotonní na M, jestliže je na M rostoucí nebo klesající.

Definice 4.3:(Okolí bodu, jednostranná okolí)
Buď $a \in R, \epsilon \in (0, \infty)$. Pak definujeme

(1) $U(a, \epsilon) = (a - \epsilon, a + \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \epsilon\}$ okolí bodu a o poloměru ϵ,
(2) $P(a, \epsilon) = (a - \epsilon, a) \cup (a, a + \epsilon)$ prstencové okolí bodu a o poloměru ϵ,
(3) $P^+(a, \epsilon) = (a, a + \epsilon)$ pravé prstencové okolí bodu a o poloměru ϵ,
(4) $P^-(a, \epsilon) = (a - \epsilon, a)$ levé prstencové okolí bodu a o poloměru ϵ.

Dále pro $a = -\infty, \epsilon \in (0, \infty)$ definujeme

(5) $U(-\infty, \epsilon) = P(-\infty, \epsilon) = P^+(-\infty, \epsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ okolí bodu $-\infty$ o poloměru ϵ, prstencové okolí a pravé prstencové okolí bodu $-\infty$ o poloměru ϵ (levé okolí nedefinujeme).

a pro $a = \infty, \epsilon \in (0, \infty)$ definujeme

(6) $U(\infty, \epsilon) = P(\infty, \epsilon) = P^-(\infty, \epsilon) = (\frac{1}{\epsilon}, \infty)$ okolí bodu ∞ o poloměru ϵ, prstencové okolí a levé prstencové okolí bodu ∞ o poloměru ϵ (pravé okolí nedefinujeme).

4.2. Definice limity a spojitosti, základní vlastnosti

Definice 4.4: (Limita funkce)
Buďte $a, L \in R^*$.Řekneme, že funkce f má v bodě a limitu L
(značíme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$), jestliže

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in U(L, \epsilon).$$

Poznámka
Má-li funkce f v bodě a limitu, pak existuje kladné δ tak, že definiční obor D_f funkce f obsahuje $P(a, \delta)$.

Definice 4.5: (Spojitost funkce v bodě)
Buď $a \in R$.Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě a, jestliže existuje limita $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definice 4.6: (Jednostranné limity)
Buď $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f má v bodě a limitu zprava (zleva) rovnou L, jestliže platí
$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in P^+(a, \delta) : f(x) \in U(L, \epsilon)$,
$(\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in P^-(a, \delta) : f(x) \in U(L, \epsilon))$.
Značíme $\lim_{x \to a+} = L(\lim_{x \to a+} = L)$.

Věta 4.1:(L) (Jednoznačnost limity)
Jestliže $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ a současně $\lim\limits_{x \to a} f(x) = K$, pak $L = K$.

Věta 4.2:(L) (Existence vlastní limity a omezenost funkce)
Je-li $L \in R$ a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, pak existuje $\delta > 0$ tak, že f je omezená na $P(a, \delta)$.

Věta 4.3:(T) (Heine)
Buďte $a, L \in R^*$. Předpokládejme, že $P(a, \delta) \subset D_f$. Pak jsou ekvivalentní tvrzení (*),(**), kde
(*) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
(**) pro každou posloupnost $(x_n) \subset P(a, \delta)$, pro kterou $x_n \to a$, platí $f(x_n) \to L$.

Věta 4.4:(T) (Aritmetika limit)
Jestliže $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L, \lim\limits_{x \to a} g(x) = K$, pak platí
(i) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + K$, je-li součet $L + K$ definován;
(ii) $\lim\limits_{x \to a} (f(x).g(x)) = L.K$, je-li součin $L.K$ definován;
(iii) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$, je-li podíl $\frac{L}{K}$ definován.

Poznámky
1. Připomeňme, že není definován součet typu $\infty - \infty$, součin typu $0.\infty$ a podíl typu $\frac{L}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.
2.Větu 4.4 je možné v několika směrech zobecnit. Často budeme používat tato tvrzení:
1. Je-li f omezená zdola na $P(a, \delta)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, pak $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = \infty$.
2. Je-li f omezená na $P(a, \delta)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, pak $\lim\limits_{x \to a} f(x).g(x) = 0$.
3. Je-li f omezená zdola na $P(a, \delta)$ kladnou konstantou K, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, pak $\lim\limits_{x \to a} f(x).g(x) = \infty$.
4. Je-li f kladná na $P(a, \delta)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, pak $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

Důsledek: (Aritmetika spojitých funkcí)
Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak jsou i $f + g, f.g$ spojité v bodě a. Je-li navíc $g(a) \neq 0$, je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v bodě a.

Věta 4.5:(L) (Limita a nerovnosti)
Nechť $K, L \in \mathbb{R}^*, \lim\limits_{x \to a} f(x) = L, \lim\limits_{x \to a} g(x) = K$. Pak platí

1. Jestliže $\exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \leq g(x)$, pak $L \leq K$.
2. Jestliže $L < K$, pak $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : f(x) < g(x)$.

Věta 4.6:(L) (Věta o dvou policajtech)
Nechť $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta) : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ a současně
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L, \lim\limits_{x \to a} g(x) = L.$
Pak existuje $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L.$

Poznámka
Je-li L nevlastní, platí obdobně věta o "jednom" policajtovi: Nechť $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta) : f(x) \leq h(x)$ a současně $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Pak existuje $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \infty$.

Věta 4.7:(T) (Limita složené funkce)
Nechť $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{y \to L} g(y) = K$. Je-li navíc splněn jeden z předpokladů
(P1) existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P(a,\delta) : f(x) \neq L$,
(P2) g je spojitá v bodě L,
pak existuje $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = K$.

Důsledek:
Je-li f spojitá v bodě a a g spojitá v bodě L, je složená funkce $g \bullet f$ spojitá v bodě a.

Věta 4.8:(BD) (Limita monotonní funkce)
Buď f monotonní na intervalu (a,b). Pak existují $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$.

4.3 Elementární funkce

Věta 4.9:(BD) (Zavedení exponenciální funkce)
Existuje jediná funkce ϕ splňující požadavky
(i) ϕ je rostoucí na R,
(ii) $\forall x, y \in R : \phi(x+y) = \phi(x).\phi(y)$,
(iii) $\phi(0) = 1$,
(iv) $\lim_{x \to 0} \frac{\phi(x)-1}{x} = 1$.
Tuto funkci nazveme exponenciální funkce (se základem e) a budeme značit $\phi(x) = e^x$ resp. $\phi(x) = exp(x)$.

Věta 4.10:(BD) (Zavedení logaritmu)
Existuje jediná funkce ψ splňující požadavky
(i) ψ je definována a rostoucí na $(0,\infty)$,
(ii) $\forall x, y \in R : \psi(x.y) = \psi(x) + \psi(y)$,
(iii) $\psi(1) = 0$,
(iv) $\lim_{x \to 1} \frac{\psi(x)}{x-1} = 1$.
Tuto funkci nazveme logaritmus (se základem e) a budeme značit $\psi(x) = \ln x$ resp. $\psi(x) = \log x$.

Definice 4.7: (Definice obecné mocniny)
Buď $a \in (0,\infty), b \in R$. Pak definujeme mocninu $a^b = e^{b \ln a}$.

Věta 4.11: (Zavedení sinu a kosinu)
Existují jednoznačně určené funkce sinus a kosinus (budeme je značit $\sin, \cos$) definované na $\mathbb{R}$ a číslo $\pi in (0,\infty)$, které splňují požadavky
(i) sin je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$,
(ii) pro všechna $x, y \in R$ platí

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

(iii) $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$,
(iv) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Důsledek
Funkce sinus je lichá, rostoucí na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 2π-periodická, $\sin \frac{\pi}{2} = 1, \sin(x + \pi) = -\sin x, \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$.

Definice 4.8: (Definice dalších goniometrických a cyklometrických funkcí)
Funkce tangens: $\forall x \in R, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z : \mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$,
funkce kotangens: $\forall x \in R, x \neq k\pi, k \in Z : \mathrm{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$,
funkce arkussinus (značíme arcsin) je inverzní funkcí k funkci sinus*, kde $\sin^* x = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
funkce arkuskosinus (značíme arccos) je inverzní funkcí k funkci kosinus*, kde $\cos^* x = \cos x, x \in [0, \pi]$,
funkce arkustangens (značíme arctg) je inverzní funkcí k funkci tangens*,kde $\mathrm{tg}^* x = \mathrm{tg}\, x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
funkce arkuskotangens (značíme arccotg) je inverzní funkcí k funkci kotangens*, kde $\mathrm{cotg}^* x = \mathrm{cotg}\, x, x \in [0, \pi]$.

Věta 4.12:(BD) (Spojitost elementárních funkcí)
Exponenciální funkce, logaritmus, sinus, kosinus, tangens, kotangens, arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens jsou spojité na definičních oborech.

4.4 Vlastnosti spojitých funkcí na intervalu

Definice 4.9: (Spojitost na intervalu)
Řekneme, že f je spojitá na intervalu I, je-li spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I, spojitá zprava v levém krajním bodě a intervalu I (pokud $a \in I$) a spojitá zleva v pravém krajním bodě b intervalu I (pokud $b \in I$).

Poznámka
Ekvivalentně lze definici spojité funkce na intervalu I vyslovit takto: Funkce f je spojitá na I, je-li spojitá zprava v každém bodě intervalu I, který není jeho koncovým bodem a je spojitá zleva v každém bodě intervalu I, který není jeho počátečním bodem.

Věta 4.13:(T) (Darbouxova věta)
Buď f spojitá na $[a, b], f(a) < f(b)$. Pak pro každé $d \in (f(a), f(b))$ existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(c) = d$.

Věta 4.14:(L) (Zobrazení intervalu spojitou funkcí)
Buď f spojitá na intervalu I. Pak je $f(I)$ jednobodová množina nebo interval.

Definice 4.10: (Maximum a minimum funkce na množině)
Řekneme, že funkce f nabývá na množině M maxima v bodě $a \in M$, jestliže

$$\forall x \in M : f(x) \leq f(a).$$

Řekneme, že funkce f nabývá na množině M ostrého maxima v bodě $a \in M$, jestliže

$$\forall x \in M, x \neq a : f(x) < f(a).$$

Řekneme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $b \in M$, jestliže

$$\forall x \in M : f(x) \geq f(b).$$

Řekneme, že funkce f nabývá na množině M ostrého minima v bodě $b \in M$, jestliže

$$\forall x \in M, x \neq b : f(x) > f(b).$$

Maxima a minima funkce f nazveme extrémy funkce f na množině M.
Řekneme, že funkce f nabývá na množině M lokálního maxima v bodě $a \in M$ (ostrého lokálního maxima v bodě $a \in M$), jestliže existuje okolí U bodu a tak, že f nabývá maxima (ostrého maxima) na množině $M \cap U$ v bodě a.
Obdobně řekneme, že funkce f nabývá na množině M lokálního minima v bodě $b \in M$ (ostrého lokálního minima v bodě $b \in M$), jestliže existuje okolí U bodu b tak, že f nabývá minima (ostrého minima) na množině $M \cap U$ v bodě b.

Věta 4.15:(T) (Spojitost a nabývání extrémů)
Buď f spojitá na uzavřeném intervalu $I = [a, b]$. Pak f nabývá na I maxima i minima.Pak f je na I omezená.

Věta 4.16:(L) (Spojitost a omezenost funkce)
Buď f spojitá na uzavřeném intervalu $I = [a, b]$ .Pak f je na I omezená.

Lemma 4.3:(BD)
Buď f spojitá a prostá na intervalu I. Pak je f na I ryze monotonní.

Věta 4.17:(BD) (Spojitost inverzní funkce)
Buď f spojitá a prostá na intervalu I. Pak je f_{-1} spojitá na intervalu $f(I)$.