První předběžná písemka z matematické analýzy pro informatiky
zimní semestr 2007–2008
Předběžné zadání

Příklad 1. Rozhodněte, zda jsou dvojicí rovnic

$$\begin{aligned} x + y - \sin z &= 0 \\ e^x - x - y^3 &= 1 \end{aligned}$$

nebo dvojicí rovnic

$$\begin{aligned} x + y - \sin z &= 0 \\ e^z - x - y^3 &= 1 \end{aligned}$$

jednoznačně určeny hladké funkce $y(x), z(x)$ na okolí bodu $x = 0$ takové, že $y(0) = 0, z(0) = 0$. Pokud ano, spočítejte

$$\frac{d^2 z}{dx^2}(0). \qquad \textbf{(5 bodů)}$$

Příklad 2. Rozhodněte, zda vztahy

$$\begin{aligned} &xe^y + uz - \cos v = 2 \\ &u \cos y + x^2 - yz^2 = 5 \\ &\operatorname{arctg} y + e^u + vxz = e \qquad \textbf{(5 bodů)} \end{aligned}$$

definují na okolí bodu $[x, z] = [2, 1]$ diferencovatelné funkce u, v, y proměnných $[x, z]$, splňující podmínky $u(2, 1) = 1, v(2, 1) = 0, y(2, 1) = 0$. Pokud ano, rozhodněte, zda má funkce $y(x, z)$ v bodě $[2, 1]$ totální diferenciál a spočítejte jej.

Příklad 3. Rozhodněte, zda funkce $f(x, y) = 12xy - x^2y - xy^2$ nabývá (globálního) maxima a minima na R^2. Nalezněte stacionární body f a zjistěte, zda f nabývá v těchto bodech lokálních extrémů.

(5 bodů)

Příklad 4. Vysvětlete podrobně, proč funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ nabývá maxima a minima na množině $M = \{[x, y, z] \in R^3; x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0, xyz = 1\}$. Nalezněte body, ve kterých f nabývá extrémů a spočítejte funkční hodnoty v těchto bodech.

(5 bodů)