Kapitola 5. Derivace

5.1. Úvodní definice, aritmetika derivací

Definice 5.1:
Buďte $a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f má v bodě a derivaci c (značíme $f'(a) = c$), jestliže existuje

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c.$$

Obdobně řekneme , že funkce f má v bodě a derivaci zprava c (značíme $f'_+(a) = c$), jestliže existuje

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$$

a funkce f má v bodě a derivaci zleva c (značíme $f'_-(a) = c$), jestliže existuje

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c.$$

Poznámka:
Je-li $c \in R$, mluvíme o vlastní derivaci, je-li $c = \infty, c = -\infty$, mluvíme o nevlastní derivaci.

Věta 5.1:(L) (Spojitost a derivace)
Má-li f v bodě a vlastní derivaci, je f v bodě a spojitá.

Věta 5.2:(T) (Aritmetika derivací)
Nechť f a g mají (vlastní nebo nevlastní) derivaci v bodě a. Pak platí
(1) existuje $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$, pokud je výraz na pravé straně definován,
(2) je-li g spojitá v bodě a, existuje $(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$,pokud je výraz na pravé straně definován,
(3) je-li g spojitá v bodě a a $g(a) \neq 0$, existuje $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{g^2(a)}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Věta 5.3:(T) (Derivace složené funkce)
Nechť f má derivaci v bodě a a g má derivaci v bodě $b = f(a)$ a f je v bodě a spojitá. Pak existuje derivace složené funkce $g \bullet f$ v bodě a a platí

$$(g \bullet f)'(a) = g'(f(a)).f'(a),$$

pokud je výraz na pravé straně definován.

Věta 5.4:(BD) (Derivace inverzní funkce)
Buď f spojitá a prostá na intervalu $I = (a, b), x_0 \in I$ a předpokládejme, že existuje vlastní nenulová $f'(x_0)$. Pak existuje derivace funkce f^{-1} v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Poznámka:

Jestliže ve větě 5.4 připustíme, aby $f'(x_0)$ byla nevlastní nebo nulová, pak platí

(1) je-li $f'(x_0) = \infty$(nebo$f'(x_0) = -\infty$), je $(f^{-1})'(y_0) = 0$,

(2) je-li $f'(x_0) = 0$ a f je rostoucí, je $(f^{-1})'(y_0) = \infty$, je-li $f'(x_0) = 0$ a f je klesající, je $(f^{-1})'(y_0) = -\infty$.

Rozmyslete si obdobná tvrzení pro jednostranné derivace.

Věta 5.5(L) (Fermatova, nutná podmínka pro lokální extrém)

Nechť f má v bodě c lokální extrém a existuje (vlastní nebo nevlastní) $f'(c)$. Pak je $f'(c) = 0$.

Věta 5.6(T) (Rolleova)

Buď f spojitá na $[a, b], f(a) = f(b) = 0$ a existuje (vlastní nebo nevlastní) derivace $f'(x)$ v každém bodě $x \in (a, b)$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Věta 5.7(L) (Lagrangeova)

Buď f spojitá na $[a, b]$ a existuje (vlastní nebo nevlastní) derivace $f'(x)$ v každém bodě $x \in (a, b)$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Věta 5.8:(BD) (L'Hospitalovo pravidlo)

Typ "$\frac{0}{0}$"

Buďte $a, L \in R^*$. Předpokládejme, že

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

a existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Pak existuje i $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Typ "$\frac{\infty}{\infty}$"

Buďte $a, L \in R^*$.Předpokládejme, že

$\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$

a existuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Pak existuje i $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Věta 5.9:(L) (Derivace a limita derivací)

Buď f spojitá zprava v bodě a. Předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) $\lim\limits_{x\to a+} f'(x) = L$. Pak existuje derivace $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = L$.

Věta 5.10: (Znaménko derivace a monotonie)

Buď f spojitá na $[a, b]$ a v každém bodě $x \in (a, b)$ existuje (vlastní nebo nevlastní) derivace $f'(x)$. Pak platí

(1) jestliže $\forall x \in (a, b): \quad f'(x) > 0$, je f rostoucí na $[a, b]$,

(2) jestliže $\forall x \in (a, b): \quad f'(x) < 0$, je f klesající na $[a, b]$,

(3) výrok $(\forall x \in (a, b): \quad f'(x) \geq 0)$ platí právě tehdy, je-li f neklesající na $[a, b]$,

(4) výrok $(\forall x \in (a, b): \quad f'(x) \leq 0)$ platí právě tehdy, je-li f nerostoucí na $[a, b]$.

Definice 5.2(Derivace vyššího řádu)

Buď $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ a f má vlastní n-tou derivaci $f^{(n)}(x)$ na okolí bodu a. Pak $n + 1$- ní derivací funkce f v bodě a rozumíme

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a + h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

5.2. Konvexní a konkávní funkce

Definice 5.3:
Řekneme, že funkce f je konvexní na intervalu I, jestliže

$$\forall x, y \in I \quad \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Obdobně definujeme i další pojmy:
funkce f je konkávní na intervalu I, jestliže

$$\forall x, y \in I \quad \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

funkce f je ryze konvexní na intervalu I, jestliže

$$\forall x, y \in I, \ x \neq y \ \forall \lambda \in (0,1) : f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

funkce f je ryze konkávní na intervalu I, jestliže

$$\forall x, y \in I, \ x \neq y \ \forall \lambda \in (0,1) : f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Poznámka
Další věty budeme formulovat pouze pro konvexní funkce. Analogická tvrzení platí pro funkce konkávní.

Lemma 5.2:(BD)
Funkce f je konvexní na intervalu I právě tehdy, když

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I : x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta 5.11:(T) (Konvexita a jednostranné derivace)
Buď f konvexní na intervalu (a,b) . Pak
1. $\forall x \in (a,b)$ existují vlastní derivace $f'_+(x), f'_-(x)$,
2. $f'_+(x) \geq f'_-(x)$,
3. f'_+, f'_-jsou neklesající na (a,b)

Věta 5.12:(T) (Konvexita a spojitost)
1. Je-li f konvexní na (a,b), je na tomto intervalu spojitá.
2. Je-li f konvexní na $[a,b]$, nemusí být spojitá zprava v bodě a resp zleva v bodě b.
3. Množina těch bodů x z intervalu $[a,b]$, v nichž neexistuje (oboustranná) derivace $f'(x)$, je nejvýše spočetná.

Věta 5.13:(T)
Buď f spojitá na $[a,b]$, nechť existuje f' na (a,b). Pak f je konvexní na $[a,b]$ právě tehdy, když je f' neklesající na (a,b).

Poznámka:
Spojitost funkce f v krajních bodech intervalu $[a,b]$ je zapotřebí ke konvexitě na $[a,b]$. Na otevřeném intervalu (a,b) lze větu zformulovat takto:

Nechť existuje f' na (a, b). Pak f je konvexní na (a, b) právě tehdy, když je f' neklesající na (a, b).

Věta 5.14:(L)
Buď f spojitá na $[a, b]$, nechť existuje vlastní f'' na (a, b). Pak f je konvexní na $[a, b]$ právě tehdy, když je f'' nezáporná na (a, b).

Definice 5.4: Nechť existuje vlastní derivace $f'(c)$. Tečnou T_c ke grafu funkce f v bodě $[c, f(c)]$ nazveme přímku

$$T_c = \{[x, y] \in R_2; y = f(c) + f'(c)(x - c)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ leží pod tečnou T_c, jestliže $f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c)$, a $[x, f(x)]$ leží nad tečnou T_c, jestliže $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$.

Definice 5.5:
Řekneme, že c je inflexním bodem funkce f, jestliže existuje $f'(c) \in R$ a kladné δ tak, že buď pro všechna $x \in P^-(c, \delta)$ leží $[x, f(x)]$ nad tečnou T_c a pro všechna $x \in P^+(c, \delta)$ leží $[x, f(x)]$ pod tečnou T_c nebo pro všechna $x \in P^-(c, \delta)$ leží $[x, f(x)]$ pod tečnou T_c a pro všechna $x \in P^+(c, \delta)$ leží $[x, f(x)]$ nad tečnou T_c.
Věta 5.15:(T)(Nutná podmínka pro inflexní bod)
Jestliže existuje $f'(c) \in R, f''(c) \in R^*$ a je-li c inflexním bodem funkce f, pak je $f''(c) = 0$.
Věta 5.16:(BD)(Postačující podmínka 1. pro inflexní bod)
Jestliže existuje $f'(c) \in R$ a kladné δ tak, že buď je f konvexní na $P^-(c, \delta)$ a konkávní na $P^+(c, \delta)$ nebo je f konkávní na $P^-(c, \delta)$ a konvexní na $P^+(c, \delta)$, pak bod c je inflexním bodem funkce f.
(Postačující podmínka 2. pro inflexní bod)
Jestliže existuje $f'(c) \in R$ a kladné δ tak, že buď je $f'' > 0$ na $P^-(c, \delta)$ a $f'' < 0$ na $P^+(c, \delta)$ nebo je $f'' < 0$ na $P^-(c, \delta)$ a $f'' > 0$ na $P^+(c, \delta)$, pak bod c je inflexním bodem funkce f.

Definice 5.6: (Asymptoty)
Řekneme, že přímka $p = \{[x, y] \in R_2; y = ax + b\}$ je asymptotou ke grafu funkce f v bodě ∞ (resp. $-\infty$), jestliže $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$).

Věta 5.17: (Tvar asymptoty)
Přímka $p = \{[x, y] \in R^2; y = ax + b\}$ je asymptotou ke grafu funkce f v bodě ∞ právě tehdy, když

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax).$$

Obdobné tvrzení platí pro asymptotu v $-\infty$.