Reálné funkce, pojem limity a spojitosti v bodě

Problém 1:

Buď $f : X \to Y$ zobrazení a označme D_f definiční obor f, obraz množiny $A \subset X$ a $f^{-1}(B)$ vzor množiny $B \subset Y$, tj.$f(A)$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in X; \exists y \in Y \text{tak, že} f(x) = y\},\\ f(A) &= \{y \in Y; \exists x \in A \text{tak, že} f(x) = y\},\\ f^{-1}(B) &= \{x \in X; \exists y \in B \text{tak, že} f(x) = y\}. \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda platí resp. za jakých předpokladů platí $\forall A \subset X : f^{-1}(f(A)) = A$, $\forall B \subset Y : f(f^{-1}(B)) = B$.

Problém 2:

Dokažte, že funkce f je na intervalu I rostoucí, právě když platí

$$\forall \;\; x, y \in I, x \neq y : \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0.$$

Problém 3:

Je-li f neklesající na $(-\infty, a>$ a nerostoucí na $<a, \infty)$ pro nějaká $a \in \mathbb{R}$, pak f nabývá maxima.

Problém 4:

Nechť f nabývá minima v $a \in \mathbb{R}$. Musí pak existovat $\epsilon > 0$ takové, že f je nerostoucí na $(a - \epsilon, a>$ a neklesající na $<a, a + \epsilon)$?

Problém 5:

Které z následujících operací provedených na neklesající (monotonní) funkce dávají opět neklesající (monotonní) funkci?

Operace: $+, -, \max, \min, \circ$.

Existuje funkce, která není monotonní na žádném intervalu?

Příklad 1:

Studujte vlastnosti a nakreslete grafy následujících funkcí:

$$f_1(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, f_2(x) = x^n (n \in \mathbb{N}), f_3(x) = \frac{5 - |x - 7|}{2},$$
$$f_4(x) = (x - 5)^2 + 6, f_5(x) = x^2 + 2x - 7, f_6(x) = \frac{-1}{|x - 3|}.$$

Příklad 2:

Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, \text{ pokud } a = 0, 1, \infty, -\infty; \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}, \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}},$$
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}, \lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \lim_{x \to 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1},$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2}, \lim_{x \to 1} \left(\frac{m}{1 - x^m} - \frac{n}{1 - x^n}\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x},\ \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x},\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\},\ \lim_{x\to\infty}\{\sqrt[k]{(x+a_1)\cdot(x+a_2)\cdot\ldots\cdot(x+a_k)}-x\}.$$

$$\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x),\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}.$$

Příklad 3:
Najděte $a, b\in\mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0.$$

Příklad 4:
Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x},\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2},\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}.$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin ax}{\sin bx},\ \lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px},\ a,b,p\in\mathbb{R}, b\neq 0, p\neq 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}2x\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-x),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}x^k,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x-x^2)}{x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x-x+\frac{x^3}{6})}{x}.$$

$$\lim_{x\to\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}).$$

$$\lim_{x\to 0_+}\frac{\sin^2\sqrt{x}\mathrm{tg}(\sin x)}{\cos x-1},\ \lim_{x\to 0_+}\frac{e^{\sqrt{\sin x}}-\cos x}{\sqrt{x}},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\mathrm{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}},$$

Příklad 5:
S využitím vlastností exponenciální a logaritmické funkce spočítejte následující limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(x)}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tgh}(x)}{x},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2},\ \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\mathrm{cotg}^2 x},\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1+\mathrm{tg}x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin^2 x}},\ \lim_{x\to 0} x\sqrt{|\cos\frac{1}{x}|},\ \lim_{x\to 0}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\log(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})},\ \lim_{x\to 0}\log(1+2^x)\log(1+\frac{3}{x}),$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)},\ \lim_{x\to 0}\frac{\log\cos ax}{\log\cos bx},$$

$$\lim_{x\to 0_+}\log(x\log a)\cdot\log\left(\frac{\log ax}{\log\frac{x}{a}}\right),\ a>1.$$

Příklad 6:
Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují

$$\lim_{x\to\infty} x(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}),\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}(1+x)-\mathrm{arctg}(1-x)}{x}.$$

Příklad 7:
Spočítejte limity posloupností

$$\lim_{n\to\infty}\log(1+2^n)\log(1+\frac{3}{n}),\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{2n}{n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n,\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n-1}{n^n+3}\right)^{n^n+2},$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n})^n.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n,$$

kde $a_{n+1}=\sin(a_n)$ a $a_1=\sin x$.

Problém 6:
Rozhodněte, pro která $a\in\mathbb{R}$ lze funkci

$$f(x)=x^a(\arcsin x-\mathrm{arctg}x)$$

spojitě rozšířit na $\mathbb{R}$. Totéž zjistěte pro funkci

$$g(x)=x^a-\sin(\log x)\cdot\mathrm{arctg}x.$$

Problém 7:
Jaké jsou následující limity?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{[x]},\ \lim_{x\to 1}([x]-x),\ \lim_{x\to 0} x\cdot[\frac{1}{x}].$$

Zkoumejte limity funcí: Dirichletova funkce, Riemannova funkce, $[x], \{x\}, \operatorname{sign} x$ ve všech bodech $\mathbb{R}$.

Problém 8:

Existuje funkce f zobrazující $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, která je spojitá v nule a nespojitá v a, pokud $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?

Existuje funkce g zobrazující $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, která je spojitá v a, právě když $a \neq 2$?

Příklad 9:

U následujících funkcí určete definiční obor, body spojitosti, limity v krajních bodech definičního oboru resp. v bodech nespojitosti a spočítejte derivaci

$$x^x, x^{\frac{1}{x}}, (\sin x)^{\cos x}, \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x), \arcsin(\sin^2 x), \log(\arccos x),$$

$$x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x - \sqrt{x}}, \operatorname{arctg}(e^x) - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}.$$