Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu fukce zjistěte postupně:
1. definiční obor;
2. spojitost v bodech definičního oboru;
3. limity v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti, pokud existují;
4. asymptoty v $+\infty$ a v $-\infty$;
5. existenci a hodnotu oboustranné derivace, resp. jednostranných derivací;
6. maximální intervaly na nichž je funkce monotonní ;
7. extrémy a lokální extrémy, množinu hodnot;
8. maximální intervaly na nichž je funkce konkávní resp. konvexní, inflexní body;
9. nakreslete graf funkce.

Druhou derivaci není nutné zjišťovat, její výpočet však bude často prostředkem k vyšetření extrémů, konvexity a inflexních bodů.

Příklad 1:
Vyšetřete průběh polynomů :

$$f_1(x) = x^2 - x^4; f_2(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2.$$

Příklad 2:
Vyšetřete průběh racionálních funkcí:

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x^2}, f_2(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}, f_3(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

Příklad 3:
Vyšetřete průběh funkcí

$$f_1(x) = x + 2 + \frac{3}{|1+x|}, f_2(x) = \frac{|1+2x|}{\sqrt{1-2x+x^2}} \quad \text{pro} \quad x \neq 1, \quad f_2(1) = 2.$$

Příklad 4:
Vyšetřete průběh funkcí

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{x^2}{(1-x^2)^4}},$$

$$f_2(x) = \sqrt[3]{x^2(x-6)},$$

$$f_3(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1}.$$

Příklad 5:
Vyšetřete průběh funkcí

$$f_1(x) = \arctan(x^2), f_2(x) = \arcsin(\frac{1}{x}),$$

$$f_3(x) = \operatorname{arccotg}(\frac{1}{x^2}), f_4(x) = \arctan(\sqrt{\ln x}).$$

Příklad 6:
Vyšetřete průběh funkcí

$$f_1(x) = x - 2\arctan x, f_2(x) = |x-2| - 2\arctan x.$$

Příklad 7:
Vyšetřete průběh funkcí

$$f_1(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}, f_2(x) = (x-1)e^{-|x-1|},$$
$$f_3(x) = x^2 e^{-|x-1|}, f_4(x) = (|2x|)^{|2x|}.$$

Příklad 8:
Vyšetřete průběh funkcí

$$f_1(x) = \arccos(\frac{1-x^2}{1+x^2}), f_2(x) = |\arcsin(\frac{2x}{1+x^2})|,$$

$$f_3(x) = \arcsin(\frac{2x}{1+x^2}) + |x-1|, f_4(x) = \arcsin(|\frac{1-x}{1-2x}|).$$

Příklad 9:
Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}.$$

Příklad 10:
Rozhodněte pro která $k \in R$ platí

$$e^x + x^2 - 2kx \geq 0$$

pro všechna $x \in R$.

Příklad 11:
Rozhodněte pro která $\alpha \in R$ je funkce f, definovaná na R předpisem

$$f(x) = e^x - \alpha x^3,$$

konvexní na R.

Několik teoretických úloh k průběhu funkcí

Problém 5. Existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, , že $f'(x) = \infty$ pro $x \in \mathbb{R}$?

Problém 6. Je každá funkce na $\mathbb{R}$, která je neklesající (rostoucí) v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, neklesající (rostoucí) na $\mathbb{R}$?

Problém 7. Je funkce f neklesající, jestliže platí :

a) pro každé $x \in \mathbb{R}$ funkce f není klesající v x?

b) f je spojitá a pro každé $x \in \mathbb{R}$ funkce f není klesající v x "zprava" (formulujte přesně)?

Problém 8. Existuje funkce f , která je prostá, $f'(a)$ existuje, f^{-1} je spojitá v $f(a)$ a f není ryze monotonní?

Problém 9. Dokažte, že pokud je $g'(b) \in \mathbb{R}^*$, $f'(a) \in \mathbb{R}^*$, kde $b = f(a)$, pak $(gof)'(a) = g'(b)f'(a)$, pokud má pravá strana smysl.

Návod: Pokud je $f'(a) = 0$ a $g'(b) \in \mathbb{R}$, dokažte, že existuje K a okolí U bodu a tak, že $|g(y) - g(b)| \leq K|y - b|$ pro každé $y \in U$.

Příklad 10:

Existuje funkce f taková, že $f'(0) = 0$, f je rostoucí v 0 a f nemá v 0 inflexní bod?