Číselné řady

Příklad 1:
Zjistěte, zda konvergují resp divergují řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n+4}{(2n^2+5)^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}.$$

Příklad 2:
Zjistěte, zda konvergují resp divergují řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+5}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}.$$

Příklad 3:
Zjistěte, zda konvergují řady $(a, b > 0)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos^2\frac{4n\pi}{9}}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n+p}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})...(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}.$$

Příklad 4:
Pro která α konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$?

Příklad 5: Využijte limit

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1, \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\frac{1}{2}, \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$$

a zjistěte, pro která α konvergují řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})n^3, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})^{\alpha}\ln n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}\ln\frac{n+1}{n}.$$

Příklad 6:
Zjistěte, zda konvergují resp. absolutně konvergují řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\cos n^2)(\sqrt{n^6+6n}-n^3), \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n^2(\sqrt{n^6+6n}-n^3)), \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}-3^{n+1}}{n}.$$

Příklad 7:

Zjistěte, pro která $x \in R$ konvergují (resp. absolutně konvergují) řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Příklad 8:
Zjistěte, zda konvergují řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{\sqrt{n+1}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}.$$

Příklad 9: Vyšetřete konvergenci řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{2n^2 + 5}, \sum_{n=20}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{(2n^2 + 5)^2}, \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n^3 + 1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{n + \frac{1}{n}}.$$

Příklad 10: Rozhodněte, pro která reálná x konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n.$$