Supremum a infimum, limity posloupností

Příklad 1:

Nalezněte suprema a infima, resp. maxima a minima (pokud existují) následujících množin:

(i)$A = \{\frac{n-1}{n}; n \in N\}$,

(ii) $B = \{\frac{n}{n+m}; n, m \in N\}$,

(iii) $C = \{3^j, 5^{-k}; j, k \in N\}$.

Příklad 2:

Rozhodněte, pro které posloupnosti(a_n) jsou pravdivé následující výroky:

(i) $\exists a \in R \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in N \forall n \geq n_0 (|a_n - a| < \epsilon$;

(ii) $\exists a \in R \exists n_0 \in N \forall \epsilon > 0 \forall n \geq n_0 (|a_n - a| < \epsilon$;

$\exists a \in R \exists \epsilon > 0 \forall n_0 \in N \forall n \geq n_0 (|a_n - a| < \epsilon$;

Příklad 3:

Zjistěte, zda existuje (a čemu je rovna) limita posloupností

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $\lim_{n\to\infty} (\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n+2} - \frac{n}{2})$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{n^3}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^4}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{10000n}{1+n^2}$ lim
$R, \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\sqrt[4]{2} \ldots \sqrt[2^n]{2}$.

Příklad 4: (důležitý)

Zjistěte, zda existuje (a čemu je rovna) limita posloupností $(a > 1)$

$\lim_{n\to\infty} a^n, a \in R$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n}, a \in (0, \infty)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} (k \in N, a \in (0, \infty))$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$, $(a \in R)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Příklad 5:

Zjistěte, zda existuje (a čemu je rovna) limita posloupností $(x \in (0, \infty))$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

Příklad 6:

Zjistěte, zda existuje (a čemu je rovna) limita posloupností

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[4n]{n}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}, \quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt{3} - \sin n - \cos n) \frac{n^5}{\sqrt[n]{2} - 1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 4n + n \sin n}{n \cos 3n + (2n + \sin n)^2}, \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}, \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2 + n} - n),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[5]{n^4 + 2} - \sqrt[2]{n^3 + 1}}, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}, a, b, c > 0.$$

Příklad 7:

1. Dokažte, že existuje limita posloupnosti $\lim_{n\to\infty} a_n$, kde $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

Návod: Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí a posloupnost $\{b_n\}$, kde $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ je klesající.

2. Zjistěte, zda existuje (a čemu je rovna) limita posloupností

$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n$, $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$, $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n^2})^n$.

Příklad 8 (nerovnosti s logaritmy):

Dokažte, že konverguje posloupnost

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Návod:
Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ je monotonní a omezená. Užijte nerovnosti

$$\frac{1}{k+1} < \ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k}.$$

Příklad 9 (nerovnosti s faktoriály):
Dokažte nerovnosti

$$n! < e(\frac{n}{2})^n; (\frac{n}{e})^n < n! < e^2(\frac{n}{e})^{n+1}.$$

Návod: Využijte definice čísla e a matematickou indukci.

Příklad 10:
Zjistěte, zda konvergují rekurentně zadané posloupnosti

$$x_1 = \frac{a}{2}, x_{n+1} = \frac{1}{2}(a + x_n^2), \text{pro}\ \ n \geq 1, 0 \leq a \leq 1,$$

$$x_1 = 0, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{3}(2 - x_n^2),$$

$$x_1 > 0, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}\text{pro}\ \ n \geq 1,$$

$$x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})\text{pro}\ \ n \geq 1,$$

$$x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}\text{pro}\ \ n \geq 0,$$

$$x_0 = a, x_1 = b, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})\text{pro}\ \ n \geq 1.$$

Příklad 11:
Dokažte, že je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in R$, pak je i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Odvoďte odsud, že $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

Příklad 12:
Zjistěte definiční obor funkce $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$.