Úvod: nerovnosti, indukce

Příklad 1:
Nalezněte všechna reálná x, splňující nerovnosti
(i) $|2x+3| > x$;
(ii) $\frac{x-2}{2x+4} \geq 1$;
(iii) $\frac{x+3}{x-1} \geq \frac{x+1}{x-5}$;
(iv) $\sqrt{x^2+1} \geq 2x-1$.

Příklad 2:
Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b platí
(i) $|a+b| \leq |a|+|b|$,
(ii) $|a-b| \geq ||a|-|b||$.

Příklad 3:
Vyjádřete $\cos 5x$ pomocí $\cos x$ a $\sin x$.

Příklad 4:
Dokažte matematickou indukcí pro všechna $n \in N$:
(i) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,
(ii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$,
(iv) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Příklad 5: Dokažte, že každý celočíselný obnos větší nejvýš rovný 8 lze vyplatit tříkorunami a pětikorunami.

Příklad 6:
Dokažte matematickou indukcí:
(i) $\forall n \neq 3 (n^2 \leq 2^n)$;
(ii) $\forall n \geq 3 ((n+1)^n \leq n^{n+1})$;
(iii) $\forall n \in N (n! \leq (\frac{n+1}{2})^n)$.

Příklad 7:
Rozhodněte o pravdivosti a negujte výroky
(i)$\forall x \in N \exists y \in N \forall z \in N (z > x \Rightarrow y < z)$;
(ii)$\exists y \in N \forall x \in N \forall z \in N (z > x \Rightarrow y < z)$;
(iii)$\exists y \in R \forall x \in R \forall z \in R (z > x \Rightarrow y < z)$.

Příklad 8: Dokažte tzv. de Morganova pravidla:

$$A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i) \ a$$

$$A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i).$$