Kapitola 9. Funkce více proměnných

V této kapitole se budeme zabývat funkcemi více proměnných, které jsou definované na podmnožině R_n s hodnotami v R resp v R_m.

9.1.Úvodní definice

Definice 9.1:(Metrický prostor)

Metrickým prostorem budeme rozumět dvojici P, ρ, kde P je množina bodů a $\rho : P \times P \to [0, \infty)$ splňuje podmínky

(i)$\forall x, y \in P : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii)$\forall x, y \in P : \rho(x, y) = \rho(y, x)$(symetrie) ,

(iii)$\forall x, y, z \in P : \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (trojúhelníková nerovnost).

Funkci ρ s těmito vlastnostmi nazveme metrika (na P).

Na R^n budeme uvažovat euklidovskou vzdálenost, tj. pro $x = [x_1, ..., x_n], y = [y_1, ..., y_n]$ je

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Definice 9.2:(Normovaný lineární prostor)

Řekneme, že vektorový prostor P nad tělesem R s funkcí $||.|| : P \to [0, \infty)$ je normovaný lineární prostor, jestliže norma $||.||$ splňuje následující axiomy

$$\forall x \in P : ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$\forall x \in P, \alpha \in R : ||\alpha x|| = |\alpha| ||x||,$$

$$\forall x, y \in P : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Poznámka:

Položíme-li $\rho(x, y) = ||x - y||, \forall x, y \in P$, je normovaný lineární prostor s touto metrikou také metrickým prostorem. Normou na $\mathbb{R}^n$ je tedy zobrazení, které $x = [x_1, ..., x_n] \in \mathbb{R}^n$ přiřadí číslo $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$.

Definice 9.3:(Otevřená koule v metrickém prostoru)

Buď r kladné,$x \in P$. Definujeme otevřenou kouli se středem v bodě x a s poloměrem r jako $B(x, r) = \{y \in P; \rho(x, y) < r\}$.

Definice 9.4:(Otevřená a uzavřená množina)

Řekneme, že $G \subset P$ je otevřená, jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset G$. Řekneme, že $F \subset P$ je uzavřená, jestliže $G = P \setminus F$ je otevřená.

Věta 9.1:(Vlastnosti otevřených množin)

Buď P, ρ metrický prostor. Pak platí

1. P a $\emptyset$ jsou otevřené množiny.

2. Jsou-li množiny G_α otevřené pro všechna $\alpha \in A$ (kde A má libovolnou mohutnost), pak je i $\cup_{\alpha \in A} G_\alpha$ otevřená množina.

3. Je-li $n \in \mathbb{N}$ a jsou-li množiny G_i otevřené pro všechna $i = 1, ..., n$, je i $\cap_{i=1}^{n} G_i$ otevřená množina.

Věta 9.2:(Vlastnosti uzavřených množin)
Buď P, ρ metrický prostor. Pak platí
1. P a $\emptyset$ jsou uzavřené množiny.
2. Jsou-li množiny F_α uzavřené pro všechna $\alpha \in A$ (kde A má libovolnou mohutnost), pak je i $\cap_{\alpha \in A} F_\alpha$ uzavřená množina.
3. Je-li $n \in \mathbb{N}$ a jsou-li množiny F_i uzavřené pro všechna $i = 1, ..., n$, je i $\cup_{i=1}^n F_i$ uzavřená množina.

Definice 9.5:(Vnitřek, uzávěr a hranice množiny)
Buď P, ρ metrický prostor, $M \subset P$.
Řekneme, že x je vnitřním bodem množiny M, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset M$. Množinu všech vnitřních bodů nazveme vnitřek (množiny M) a značíme M^o.
Řekneme, že x je hraničním bodem množiny M, jestliže pro každé $r > 0$ je $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů nazveme hranicí (množiny M) a značíme $h(M)$.
Množinu $M \cup h(M)$ nazveme uzávěrem množiny M a značíme $\overline{M}$.
Ekvivalentně lze definovat

$$M^o = \cup\{G \subset M; G \text{ otevřená}\}, \overline{M} = \cap\{F \supset M, F \text{ uzavřená}\}.$$

Definice 9.6:(Konvergentní posloupnost)
Nechť $(x_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků z P a $x \in P$. Řekneme, že $(x_n)_{n=1}^\infty$ konverguje k x (v metrice ρ), jestliže $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Značíme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ nebo $x_n \to x$.

Definice 9.7:(Omezené množiny)
Řekneme, že $K \subset P$ je omezená, jestliže existuje $A \in R$ tak, že pro každé dva body $x, y \in K$ je $\rho(x, y) \leq A$.

Definice 9.8:(Kompaktní množiny)
Řekneme, že $K \subset P$ je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti (x_n) prvků K lze vybrat podposloupnost konvergentní (k prvku množiny K).

Věta 9.3:(T)(Kompaktní množiny v R^n)
Množina $K \subset R^n$ je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená

9.2.Spojitost a limita funkcí více proměnných

Definice 9.9:(Spojité funkce)
Buďte $(R, \rho), (S, \sigma)$ metrické prostory, $M \subset R, x_0 \in M$ a $f : M \to S$. Řekneme, že f je spojitá v bodě x_0 vzhledem k množině M, jestliže

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in M \cap B_\rho(x_0, \delta) : f(x) \in B_\sigma(f(x_0, \epsilon)).$$

Řekneme, že f je spojitá na (vzhledem k M), je-li spojitá v každém bodě M (vzhledem k M).

Věta 9.4:(Spojitost složeného zobrazení)
Buďte $(R, \rho), (S, \sigma), (T, \tau)$ metrické prostory, buď $f : R \to S$ spojité zobrazení na R a $g : S \to T$ spojité zobrazení na S. Pak zobrazení $h : x \in R \to T : h(x) = g(f(x))$ je spojité na R.

Věta 9.5:(Heine)

Buďte $(R, \rho), (S, \sigma)$ metrické prostory, buď $f : R \to S$ zobrazení. Pak f je spojité v bodě $x \in R$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $(x_n) \subset R$ pro níž platí $x_n \to x$ je $f(x_n) \to f(x)$.

Definice 9.10:(Limita funkce)

Buďte $(R, \rho), (S, \sigma)$ metrické prostory, $M \subset R, x_0 \in R$. Nechť pro každé $\delta > 0$ platí $M \cap (B_\rho(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Řekneme, f že má v bodě x_0 limitu $y \in S$ (vzhledem k množině M), jestliže

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in M \cap (B_\rho(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) : f(x) \in B_\sigma(y, \epsilon).$$

Snadným důsledkem definice normy v R_n je následující lemma.

Lemma 9.1:(Limita funkce více proměnných a jejích složek)

Buď $f : R_n \to R_m, f(x) = [f_1(x), ..., f_m(x)]$. Pak

$$\lim_{x \to a} f(x) = A = [A_1, ...A_m] \Leftrightarrow \forall i = 1, ..., m : \lim_{x \to a} f_i(x) = A_i.$$

Lemma 9.2:(Spojitost projekcí)

Buď $i = 1, ..., n, P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, P_i([x_1, ..., x_n]) = x_i$ (projekce na i-tou složku). Pak je P_i spojité na $\mathbb{R}^n$.

Věta 9.6:(L)(Aritmetika limit)

Buďte $f, g : R_n \to R, a \in R_n$.

Předpokládejme, že existují $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$. Pak platí

1. existuje $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B$, má-li součet $A + B$ smysl;
2. existuje $\lim\limits_{x \to a} (f(x).g(x)) = A.B$, má-li součin $A.B$ smysl;
3. existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, má-li podíl $\frac{A}{B}$ smysl.

Věta 9.7:(L)(Charakterizace spojitých zobrazení)

Buďte $(R, \rho), (S, \sigma)$ metrické prostory, $f : R \to S$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

1. f je spojité na R;
2. pro každou otevřenou množinu $G \subset S$ je $f^{-1}(G)$ otevřená v R;
3. pro každou uzavřenou množinu $F \subset R$ je $f^{-1}(F)$ uzavřená v R.

Věta 9.8:(T)(Spojitý obraz kompaktu)

Buďte $(R, \rho), (S, \sigma)$ metrické prostory, $K \subset R$ kompaktní, $f : K \to S$ spojitá na K. Pak je $f(K)$ kompaktní v S.

Věta 9.9:(T)(Nabývání extrémů na kompaktu)

Buď (R, ρ) metrický prostor, $K \subset R$ kompaktní, $f : K \to \mathbb{R}$ spojitá na K. Pak f nabývá na K svého maxima a minima.

9. 3. Parciální derivace a totální diferenciál

V tomto odstavci bude (není-li řečeno jinak) $R = \mathbb{R}^n$ a $S = \mathbb{R}$.

Definice 9.11(Derivace ve směru, parciální derivace)

Buďte $a, v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a derivaci ve směru v , jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Tuto limitu pak nazveme derivací ve směru v a značíme $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$. Je-li $v = e_i$ nazýváme derivaci v tomto směru i-tou parciální derivací a značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Poznámka

Funkce f má v bodě a derivaci ve směru v právě tehdy, když existuje vlastní derivace funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$g(t) = f(a+tv), t \in U(0) \subset \mathbb{R}$$

v bodě 0. Pak platí $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = g'(0)$.

Definice 9.12(Extrémy a lokální extrémy)

Buď $x_o \in M \subset \mathbb{R}^n$,$f : M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f nabývá v bodě x_o svého minima (resp. lokálního minima) vzhledem k M, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \geq f(x_o)$ (resp. existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in B(x_o, \delta) \cap M$ platí $f(x) \geq f(x_o)$). Analogicky definujeme maximum resp. lokální maximum.

Věta 9.10(Fermatova, nutná podmínka pro extrém)

Nechť Gje otevřená, $a \in G$ a $f : G \to \mathbb{R}$. Má-li f v bodě a lokální minimum (resp. lokální maximum) vzhledem k G a existuje $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$, pak je $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$.

Definice 9.13(Totální diferenciál)

Řekneme, že $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě a totální diferenciál , jestliže existuje lineární zobrazení A z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, okolí $B(a)$ bodu a v $\mathbb{R}^n$ a funkce $\eta : B(a) \to \mathbb{R}$ tak, že

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + ||x-a||\eta(x)$$

na $B(a)$ a současně

$$\lim_{x \to a} \eta(x) = 0 = \eta(a).$$

Lineární zobrazení A pak nazveme totálním diferenciálem funkce f v bodě a a značíme $df(a) = A$.

Poznámky:

1. Ekvivalentně lze definici vyslovit také těmito dvěma způsoby:

a) Existuje lineární zobrazení A tak, že funkce ϕ definovaná na prstencovém okolí počátku $B(0) \setminus \{0\}$ rovností

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + ||h||\phi(h)$$

a taková, že $\phi(0) = 0$, je spojitá v 0.

b) Existuje lineární zobrazení A tak, že funkce ψ definovaná na prstencovém okolí počátku rovností

$$f(a+h) = f(a) + A(h) + \psi(h)$$

splňuje podmínku

$$\lim_{||h||\to 0} \frac{\psi(h)}{||h||} = 0.$$

2. Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tj. $f = [f_1, ..., f_m]$, kde $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f má totální diferenciál v bodě a, jestliže pro všechna $i = 1, ..., m$ mají f_i totální diferenciál v bodě a. Totální diferenciál zobrazení f je pak lineární zobrazeni $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Věta 9.11:(Diferenciál a spojitost f)
Má-li f v bodě a totální diferenciál, je f v bodě a spojitá.

Věta 9.12:(Tvar totálního diferenciálu)
Má-li f v bodě a totální diferenciál A, pak pro každé $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ existuje $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$. Dále existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ pro všechna $i = 1, ..., n$ a platí

$$A(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

a $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = A(v)$.