8. Určitý integrál
8.1. Newtonův integrál

Definice 8.1

Buďte $a, b \in R^*$. Řekneme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje (značíme jej $(N) \int_a^b f(x)dx$), jestliže

1.existuje primitivní funkce F k f na intervalu (a, b),

2. existují vlastní $\lim\limits_{x\to a+} F(x)$, $\lim\limits_{x\to b-} F(x) \in R^*$.

Pak

$$(N) \int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Množinu všech funkcí f, jejichž Newtonův integrál na (a, b) konverguje, značíme $N(a, b)$.

Značení

1. Rozdíl limit v definici integrálu budeme stručněji zapisovat takto

$$[F(x)]_a^b = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$$

8.2.Riemannův integrál

V tomto odstavci budeme vždy předpokládat, že $a, b \in R$ a funkce f je omezená na $[a, b]$.

Definice 8.2 :

Dělením D intervalu $[a, b]$ nazveme konečnou posloupnost $x_0, x_1, ..., x_n \subset [a, b]$ takovou, že $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Zapisujeme $D = \{a = x_0 < x_1 ... < x_n = b\}$.

Body $x_0, ...x_n$ nazveme dělícími body dělení D, číslo $\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1}; i = 1, ..., n\}$ nazveme normou dělení D.

Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ budeme značit $\mathcal{D}$.

Dělení D' je zjemněním dělení D, jestliže $D \subset D'$.

Definice 8.3:

Buď $D = \{a = x_0 < x_1 ... < x_n = b\}$. Pro $i = 1, ..., n$ označme

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}, M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Horním součtem pro funkci f a dělení D nazveme

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

dolním součtem pro funkci a dělení nazveme

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Poznámka

1. Buď $m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\}, M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$, $D \in \mathcal{D}$. Pak

$$m(b - a) \le s(D) \le S(D) \le M(b - a).$$

2. Pokud nedojde k nejasnostem, budeme horní a dolní součty značit pouze $s(D), S(D)$.

Lemma 8.1 (Vztahy mezi horními a dolními součty)
1. Buďte $D, D' \in \mathcal{D}, D'$ je zjemněním D. Pak platí $s(D) \leq s(D'), S(D) \geq S(D')$;
2. Pro každá dvě dělení $D, D' \in \mathcal{D}$ platí $s(D) \leq S(D')$.

Definice 8.4:
Horním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $[a, b]$ nazveme

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(D); D \in \mathcal{D}\},$$

dolním Riemannovým integrálem funkce f na intervalu $[a, b]$ nazveme

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(D); D \in \mathcal{D}\}.$$

Jestliže $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, nazveme tuto společnou hodnotu Riemannovým integrálem a značíme

$$(R) \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f.$$

Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál na intervalu $[a, b]$ budeme značit $R(a, b)$.

Poznámka Vždy platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Věta 8.1 :(Nutná a postačující podmínka existence Riemannova integrálu)
$f \in R(a, b)$ právě tehdy, když pro každé $\epsilon > 0$ existuje dělení $D \in \mathcal{D}$ tak, že $0 \leq S(D) - s(D) < \epsilon$.

Poznámka
$f \in R(a, b)$ právě tehdy, když existuje posloupnost dělení $(D_n) \subset \mathcal{D}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} (S(D_n) - s(D_n)) = 0.$$

Věta 8.2:(Linearita a nezápornost Riemannova integrálu)
$R(a, b)$ (s obvyklým sčítáním funkcí a násobením funkce konstantou) je vektorový prostor a zobrazení Ψ, které funkci $f \in R(a, b)$ přiřadí $\int_a^b f(x)dx$ je na $R(a, b)$ lineární. Zobrazení Ψ je nezáporné, tj. pro každou dvojici funkcí $f, g \in R(a, b)$ takovou, že pro všechna $x \in (a, b)$ je $f(x) \leq g(x)$ platí, že $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Věta 8.3: (Aditivita Riemannova integrálu jako funkce intervalu)
Buďte $a, b, c \in R, a < c < b$. Pak $f \in R(a, b)$ právě tehdy, když $f \in R(a, c) \cap R(c, b)$. Dále platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Definice 8.5: Řekneme, že funkce f je stejnoměrně spojitá na množině M, jestliže

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in M, |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Věta 8.4:(Spojitost a stejnoměrná spojitost)
Buď f spojitá na omezeném a uzavřeném intervalu $I = [a, b]$. Pak je f stejnoměrně spojitá na I.

Věta 8.5:(Riemannův integrál spojité nebo monotonní funkce)
1.Buď f spojitá na $[a, b]$. Pak je $f \in R(a, b)$.
2.Buď f monotonní a omezená na $[a, b]$. Pak je $f \in R(a, b)$.

Poznámky
1. Buď $m \in N, K = \{c_1, ..., c_m\} \subset [a, b]$, f spojitá na $[a, b] \setminus K$ a omezená na $[a, b]$. Pak je $f \in R(a, b)$.
2. Buď $m \in N, K = \{c_1, ..., c_m\} \subset [a, b], f \in R(a, b)$. Nechť $g : [a, b] \to R$ taková, že $g(x) = f(x)$ pro všechna $x \in [a, b] \setminus K$. Pak je $g \in R(a, b)$ a $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.
3. Obecněji platí, že $f \in R$ právě tehdy, je-li množina M bodů nespojitosti funkce f nulová v tomto smyslu: pro každé $\epsilon > 0$ existuje posloupnost intervalů $(I_n = (a_n, b_n))_{n=1}^{\infty}$ taková, že

$$(M \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n) \wedge (\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \epsilon).$$

4. Z definice Riemannova integrálu lze dokázat, že je-li $f \in R(a, b)$, pak i $|f| \in R(a, b)$ a platí

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Úmluva
Definujeme

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

pro $a > b$ je

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Věta 8.6: (Neurčitý Riemannův integrál a jeho vlastnosti)
Buď $f \in R(a, b), c \in (a, b)$. Definujme pro $x \in [a, b]$

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Funkci F nazveme neurčitým Riemannovým integrálem. Pak platí
1. F je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.
2. Je-li f spojitá v bodě $d \in (a, b)$, existuje $F'(d)$ a platí $F'(d) = f(d)$. (V krajních bodech platí analogické tvrzení s jednostrannou spojitostí f a derivací F.)

Důsledek
Důsledkem věty 8.6 je postačující podmínka pro existenci primitivní funkce. Je-li totiž funkce f spojitá na intervalu (a,b) a zvolíme-li $c \in (a,b)$ je funkce F z věty 8.6 primitivní funkcí k f na (a,b).

Věta 8.7: (Vztah mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem ze spojité funkce)
Buď f spojitá na $[a,b]$. Pak f má Newtonův i Riemannův integrál na $[a,b]$ a platí

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (N)\int_a^b f(x)dx.$$

8.3. Užití určitého integrálu

I.**Věta 8.8:** (Existence a jednoznačnost logaritmu)
Existuje jediná funkce f (nazveme ji přirozený logaritmus a značíme $f(x) = \ln(x)$), která splňuje požadavky
1. definičním oborem je interval $(0,\infty)$,
2. f je rostoucí na $(0,\infty)$,
3. $\forall\ \ x,y \in (0,\infty) : f(x.y) = f(x) + f(y)$,
4. $f(1) = 0$,
5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$.

II.**Věta 8.9:** (Integrální kritérium konvergence řad)
Buď f spojitá, nerostoucí a nezáporná na $[1,\infty)$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $(N)\int_1^{\infty} f(x)dx$.

III. **Délka grafu funkce**
Definice 8.6:
Buď ϕ spojité zobrazení intervalu $I = [a,b] \subset R$ do R.
Množinu $K = \{[x,\phi(x)], x \in I\}$ nazveme křivkou, zobrazení $x \to [x,\phi(x)]$ parametrizací křivky K.
Buď $D = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ dělení intervalu I.
Lomenou čarou $L(D)$ odpovídající dělení D nazveme sjednocení úseček s krajními body $[x_{i-1},\phi(x_{i-1})],[x_i,\phi(x_i)]$ pro $i = 1,...,n$, délkou lomené čáry $L(D)$ je pak

$$d(L(D)) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (\phi(x_i) - \phi(x_{i-1}))2}.$$

Definujeme délku křivky $d(K)$ takto

$$d(K) = \sup\{d(L(D))\},$$

kde supremum se bere přes všechny lomené čáry odpovídající dělením D intervalu I.

Věta 8.10: (Délka křivky)
Buď funkce f spojitě diferencovatelná na uzavřeném intervalu I. Pak délka křivky $K = \{[x,f(x)], x \in I\}$

$$d(K) = \int_I \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Poznámka

1. Buď $\phi : I = [a, b] \to R_n$ diferencovatelná funkce na intervalu I. Pak je délka křivky $\{[\phi(t)]; t \in [a, b]\}$ dána vzorcem

$$D(\Phi) = \int_a^b |\phi'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n |\phi_i'(t)|^2} dt,$$

pokud integrál na pravé straně existuje jako Newtonův nebo Riemannův.

2. Buďte f, g spojité na $[a, b]$,

$$M = \{[x, y]; x \in [a, b], y \in [g(x), f(x)]\},$$

buď T těleso vzniklé rotací množiny M kolem osy x, tj.

$$T = \{[x, y, z] \in R_3; x \in [a, b], g^2(x) \leq y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}.$$

Pak je objem $V(T)$ tělesa T dán vzorcem

$$V(T) = \pi \int_a^b ((f(x)^2 - (g(x)^2) dx.$$

3. Buď f spojitě diferencovatelná funkce na intervalu $I = [a, b]$, buď P plocha vzniklá rotací množiny $M = \{[x, f(x)], x \in [a, b]\}$ kolem osy x, tj.

$$P = \{[x, y, z] \in R_3; x \in [a, b], y^2 + z^2 = f^2(x)\}$$

Pak je velikost plochy P dána vzorcem

$$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$