6. Taylorův polynom

Pozorování:

Buď $c \in R$. Definujme $p_k(x) = \frac{(x-c)^k}{k!}$. Pak p_k je polynom stupně k a platí

$$p_k^{(k)}(c) = 1 \text{ a } \forall j \in N_0, j \neq k : p_k^{(j)}(c) = 0.$$

Definice 6.1:(Taylorův polynom)

Buď $f : R \to R, c \in D_f, n \in N_0$. Předpokládejme, že existuje $f^{(n)}(c) \in R$. Nazveme Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě c polynom

$$T_{n,f,c}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k;\ x \in R.$$

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme značit $T_{n,f,c}(x) = T_n(x)$. Označme dále $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Poznámka

Zřejmě je $\forall j = 0, ..., n : f^{(j)}(c) = T^{(j)}_{n,f,c}(c)$.

Věta 6.1:T (Nejlepší aproximace Taylorovým polynomem)

Buď $c \in R, n \in N_0$. Pro $n = 0$ předpokládejme, že f je spojitá v bodě c; pro $n \in N$ předpokládejme, že existuje $f^{(n)}(c) \in R$. Buď P polynom stupně nejvýše n. Pak

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - P(x)}{(x-c)^n} = 0$$

právě tehdy, když $P = T_{n,f,c}$.

Lemma 6.1:

Buď $c \in R, P$ polynom stupně nejvýše n. Jestliže

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{(x-c)^n} = 0,$$

pak $P \equiv 0$.

Definice 6.2: (Symbol o)

Řekneme, že $f(x) = o(g(x)), x \to c$, jestliže $g(x) \neq 0$ na $P(c)$ a

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Poznámka:

Větu 6.1 tedy lze vyslovit tak, že za uvedených předpokladů na f je $f(x) - T_{n,f,c}(x) = o((x-c)^n), x \to c$.

Věta 6.2:BD (Taylorova o tvaru zbytku)

Přepokládejme, že f má vlastní $(n+1)$ derivaci na intervalu $[c, x]$ (v krajních bodech jednostrannou), buď ϕ spojitá na $[c, x]$ s vlastní a nenulovou derivací na (c, x). Pak existuje $\xi \in (c, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x) = \frac{(x-\xi)^n f^{n+1}(\xi)(\phi(x) - \phi(c))}{n!\phi'(\xi)}.$$

Lagrangeův tvar zbytku: Volíme-li $\phi(t) = (x-t)^{n+1}$, dostáváme

$$R_n(x) = \frac{(x-c)^{n+1} f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Cauchyův tvar zbytku: Volíme-li $\phi(t) = t$, dostáváme

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)(x-c)(x-\xi)^n}{n!}.$$

Definice 6.3: (Taylorova řada)

Nechť f má v bodě c derivace všech řádů. Pak řadu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ nazveme Taylorovou řadou funkce f v bodě c.

Příklady Taylorových řad

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, x \in R,$

$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, x \in (-1, 1),$

$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, x \in R,$

$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, x \in R.$