Primitivní funkce

Cvičení 1: S využitím metody per partes spočtěte

$$\int x^3 \log^2 x dx, \quad \int x \sin x dx, \quad \int \frac{x^2}{e^x} dx, \quad \int x^a \log x dx (a > 0), \quad \int e^x \sin x dx,$$

$$\int \arcsin x dx, \quad \int \operatorname{arctg} x dx, \quad \int \sqrt{1 - x^2} dx, \quad \int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ spočítejte rekurentní formuli $\int e^x x^n dx, \int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx.$

Cvičení 2: S pomocí jednoduchých substitucí spočtěte

$$\int \frac{x}{1 + x^4} dx, \quad \int \frac{1}{x \log x} dx, \quad \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx, \quad \int \sin^{2k+1} x dx,$$

$$\int \cos^{2k+1} x dx \text{pro } k \in \mathbb{N}, \quad \int \operatorname{cotg} x dx, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx, \quad \int \frac{1}{\cos x} dx, \quad \int \frac{x^2}{\cos(x^3)} dx.$$

Cvičení 3: Počítejte primitivní funkce následujících racionálních funkcí

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx, \quad \int \frac{x^{17} - 5}{x^2 - 1} dx, \quad \int \frac{x}{x^3 - 3x + 2} dx,$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx, \quad \int \frac{x^2}{(x + 2)^2 (x + 4)^2} dx, \quad \int \frac{3x + 5}{2x^2 + 6x + 7} dx,$$

$$\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx, \quad \int \frac{x}{x^3 - 1} dx, \quad \int \frac{1}{x^6 + 1} dx.$$

Cvičení 4: Procvičte si "lepení" primitivních funkcí při hledání primitivních funkcí

$$\int |x| dx, \quad \int \max\{x, x^2\} dx, \quad \int |\sin x + \frac{1}{2}| dx.$$

Cvičení 5: Najděte primitivní funkce k následujícím funkcím na maximálních intervalech v definičním oboru; pomožte si převedením na integrování racionálních funkcí pomocí vhodné substituce:

$$\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} dx, \quad \int \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{1 - x}{1 + x}} dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x + 1} + \sqrt[3]{x + 1}} dx, \quad \int \frac{1}{1 + \sqrt{x + 1}} dx,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} dx, \quad \int \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 1}} dx,$$

$$\int \sqrt{x^2 - 2x - 1} dx, \quad \int \frac{2x + 3}{(x^2 + 2x + 3)\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx; \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx,$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx, \quad \int \frac{1}{\cos x \sin^3 x} dx, \quad \int \operatorname{tg}^5 x dx, \quad \int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx,$$

$$\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx, \quad \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx, \quad \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx, \quad \int \frac{1}{x \sqrt{-\ln^2 x + 4 \ln x - 3}} dx.$$

Cvičení 6: Vyšetřete, jaké vlastnosti musí mít primitivní funkce k funkci f, která je lichá, sudá, omezená, periodická, neklesající, nezáporná.

Cvičení 7: Je-li $f' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ na $(\alpha, \beta), f((\alpha, \beta)) = (a, b), F = \int f + C$, pak $\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F \circ f^{-1}(x) + C$.

Zkuste vzorec odvodit provedením per partes a substitucí "x=f(t)".

Cvičení 8: S pomocí různých postupů, např. naznačených nestandardních substitucí hledejte primitivní funkce

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx \ (t = x + \frac{1}{x}), \quad \int \sin(\log x)dx,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-a}\sqrt{x-b}}dx \ (x = a\cos^2 t + b\sin^2 t), \quad \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \ (x = \tan t),$$

$$\int \sqrt{x^2+1}dx \ (x = \cosh t), \quad \int \log(x + \sqrt{1+x^2})dx, \quad \int \frac{\log\cos x}{\cos^2 x}dx,$$

$$\int \sqrt{e^x - 1}dx, \quad \int \frac{1}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx, \quad \int e^{\sqrt{x}}dx.$$