Určitý integrál a aplikace

A.**Určitý integrál**

1. Vypočítejte
$$\int_0^{10\pi} \frac{1}{1+(\cos x)^2}dx.$$

2. Vypočítejte
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx.$$

3. Vypočítejte obsah elipsy.

4. Vypočítejte obsah plochy v omezené křivkami
$$x=\frac{1}{3}, x=3, y=\frac{1}{\sqrt{x}}, y=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

B. **Délka křivky**

B1. **Délka grafu funkce** Nechť $f \in C^1([a,b])$. Délka křivky dané grafem funkce f na intervalu $[a,b]$ je číslo
$$L(f)=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

B2. **Délka parametricky zadané křivky** Nech $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n; \varphi \in C^1([a,b])$. je
$$L(f)=\int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n (\varphi_k)'(x)}dx.$$

B3. **Délka křivky zadané v polárních souřadnicích** Je-li křivka dána rovnicí $r=\varphi(t), t \in [\alpha,\beta]$ (a φ je nezáporná), pak
$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(t)+(r')^2(t)}dt.$$

Zde r,t jsou polární souřadnice, tj. $x=r\cos t, y=r\sin t, r\in[0,\infty), t\in[0,2\pi)$ a platí $r^2=x^2+y^2, \tan t=\frac{y}{x}, , x,y\in\mathbb{R}, x\neq 0$.

5.Vypočítejte obvod kruhu.

6. Vypočítejte délku grafu funkcí
$$f(x)=x^2, x\in[0,R],$$
$$f(y)=1/3\sqrt{y}(y-3), y\in[1,9],$$
$$f(x)=x^2-\frac{1}{8}\log x, x\in[1,2],$$
$$f(x)=x^{\frac{3}{2}}, x\in[0,4],$$
$$f(x)=e^x; x\in[0,a].$$

7. Vypočítejte délku astroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

8.Vypočítejte délku křivek

$$x(t) = 3t, y(t) = 3t^2, z(t) = 2t^3; \text{od} \quad [0,0,0] \text{do} \quad [3,3,2];$$
$$x(t) = e^{-t}\cos t, y(t) = e^{-t}\sin t, z(t) = e^{-t}, t \in (0,\infty).$$

9.Spočítejte délku části Archimedovy spirály zadané v polárních souřadnicích rovnicemi

$$r(\phi) = a\phi, \phi \in [0, 2\pi].$$

(číslo a je kladný parametr.)

C. **Objem a povrch rotačního tělesa**

Nechť $f \in C([a,b]), f \geq 0$. Nechť

$$T = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{y^2+z^2} \leq f(x), x \in [a,b]\}.$$

Pak objem tělesa T je číslo

$$V(T) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Je-li navíc f' spojitá na $[a,b]$, pak povrch pláště tělesa T je číslo

$$S(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

10. Spočítejte objem a povrch kužele vzniklého rotací grafu funkce

$$f(x) = \frac{rx}{h}, x \in [0,h]$$

kolem osy x.

11. Spočítejte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \in [1,\infty)$$

kolem osy x.

12. Oblouk paraboly $y = x^2$ mezi body $[1,1], [2,4]$ rotuje kolem osy y. Spočítejte obsah vzniklé plochy.