Domácí úlohy 4.

odevzdat do 4.12. 10:40

1. (2 bodů) Buď q mocnina prvočísla. Spočtěte řád grupy $SL_2(\mathbb{F}_q)$ a dedukujte, že pro každé q existuje matice řádu 3 nad tělesem $\mathbb{F}_q$. (Pak si zkuste takovou najít, není to úplně očividné. Pozor, nad $\mathbb{F}_q$ nebudete mít obecně Jordanův tvar.)

2. (8 bodů) Najděte všechny Sylowovy podgrupy grupy $SL_2(\mathbb{F}_5)$. Pro každou uveďte explicitní generující množinu (stačí jedna pro každou velikost) a napište, s kterou malou grupou ze seznamu je izomorfní (*návod:* něco vyřeší první cvičení, něco matice v diagonálním, resp. Jordanově tvaru).

3. (10 bodů) Buď p, q prvočíselná dvojčata (tj. $p = q \pm 2$). Dokažte, že každá grupa velikosti p^2q je abelovská s jedinou výjimkou, 75, pro kterou existuje právě jedna neabelovská grupa. Tu explicitně popište (*návod:* jako semidirektní součin, použijte matici z prvního cvičení).

Úlohy na procvičování.

p-grupy

1. Buď G grupa a N její normální podgrupa taková, že N i G/N jsou p-grupy. Dokažte, že G je p-grupa. *Pozor,* pro konečné grupy to je snadné, ale váš důkaz by měl fungovat i pro nekonečné grupy.

Sylowova věta

2. Najděte všechny Sylowovy podgrupy grupy S_6.

3. Najděte všechny Sylowovy podgrupy grupy $GL_2(\mathbb{F}_3)$. (Na procvičení poslouží i jakákoliv jiná kombinace parametrů n, q, eventuálně ve variantě $SL_n(\mathbb{F}_q)$.)

4. Dokažte, že všechny grupy řádu 126 jsou (netriviálně) semidirektně rozložitelné.

5. Popište všechny grupy řádu p^2q^2, kde p, q jsou prvočísla taková, že $p^2 \not\equiv 1 \pmod q$ a $q^2 \not\equiv 1 \pmod p$.