$\varphi(n)$ = počet nesoudělných čísel s n v intervalu $1, \dots, n$
$d(n)$ = počet dělitelů čísla n
$\sigma(n)$ = součet dělitelů čísla n

Platí

$$\varphi(p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}) = p_1^{k_1-1}(p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m-1}(p_m - 1).$$

Základní úloha: odvodit podobné vzorce pro funkce d, σ. Cvičení by měla být návodem. (Vzorce najdete na další straně.)

1. Dokažte, že $\sigma(n) = n + 1$, právě když je n prvočíslo.

2. Najdi všechna n taková, že $d(n) = 10$.

3. Pro každé $k > 1$ existuje a) nekonečně mnoho čísel n takových, že $d(n) = k$; b) jen konečně mnoho čísel n takových, že $\sigma(n) = k$.

4. Je-li $2^k - 1$ je prvočíslo, pak $\sigma(2^{k-1}(2^k - 1)) = 2^k(2^k - 1)$.

5. * Platí i opačné tvrzení: je-li n sudé číslo takové, že $\sigma(n) = 2n$, pak $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ a $2^k - 1$ je prvočíslo.

6. Pro každé m, n platí $d(mn) \leq d(m)d(n)$ a $\sigma(mn) \leq \sigma(m)\sigma(n)$. Kdy nastává rovnost?

7. Pro každé n platí $d(n) \leq 2\sqrt{n}$.

8. Uvažujme posloupnost $n, d(n), d(d(n)), d(d(d(n))), \dots$ pro $n > 1$. Dokažte, že od určitého členu počínaje jsou všechny její členy rovny 2.

9. Pro která n je $\sigma(n)$ liché číslo?

10. Najdi všechna n, která se rovnají součinu všech svých vlastních dělitelů (tedy různých od 1 a n).

11. * Spočtěte $\prod_{d|n} d$.

12. * Dokažte, že n je prvočíslo právě tehdy, když $\sigma(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n)$.

13. * $\lim \frac{\sigma(n!)}{n!} = \infty$

14. * Existuje nekonečně mnoho lichých n takových, že $\sigma(n) > 2n$.

Obecný princip, jak získat vzorce pro funkce jako d, σ (ale také třeba φ):

Tyto funkce jsou tzv. *multiplikativní*, tj. pro a, b nesoudělná platí

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

Tedy

$$f(p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}) = f(p_1^{k_1}) \cdot \ldots \cdot f(p_m^{k_m}).$$

Spočítat hodnotu $f(p^k)$ bývá zpravidla snadné.

Pro funkce d, σ vyjde

$d(p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}) = (k_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_m + 1)$

$\sigma(p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}) = (1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{k_1}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_m + p_m^2 + \ldots + p_m^{k_m})$.

(Detaily důkazů si doplňte sami.)