Řešení kongruencí typu $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$, kde f je nějaký polynom:

- srazit stupeň (pomocí Eulerovy věty apod.),
- vyzkoušet všechny možnosti, je-li m malé,
- rozložit na víc rovnic, je-li m velké a složené,
- atd. (obecný algoritmus neexistuje podle Matijasevičovy věty).

1. Řešte $x^8 \equiv 2 \pmod{7}$ a $x^3 \equiv 2 \pmod{5}$.
2. Řešte $x^3 - 3x + 5 \equiv 0 \pmod{105}$.
3. Řešte $x^6 + x + xy \equiv 1 \pmod{7}$.
4. Řešte $x^6 - 1 \equiv 0 \pmod{35}$.
5. * Nechť $p > 2$ je prvočíslo a $p \nmid a$. Dokažte, že rovnice $x^2 \equiv a \pmod{p}$ má řešení právě tehdy, když $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$.

Zavedeme *Eulerovu funkci* předpisem

$$\varphi(n) = \text{ počet prvků v intervalu } 1, \dots, n-1 \text{ nesoudělných s } n.$$

Je-li $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ prvočíselný rozklad čísla n, platí

$$\varphi(n) = p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_m - 1).$$

6. Najděte všechna n taková, že $\varphi(n) = 18$.
7. Najděte všechna prvočísla p, q taková, že $\varphi(pq) = 120$.
8. Najděte všechna n taková, že $\varphi(n) = n/3$.
9. * Najděte všechna n taková, že $\varphi(n) \mid n$.

Všimněte si, že číslo $\frac{\varphi(n)}{n}$ udává pravděpodobnost, že náhodné číslo z intervalu $1, \dots, n$ je soudělné s n.

10. Dokažte, že $\limsup \frac{\varphi(n)}{n} = 1$ a $\liminf \frac{\varphi(n)}{n} = 0$.
11. Dokažte, že má-li n méně než 8 prvočíselných dělitelů, pak $\frac{\varphi(n)}{n} > \frac{1}{6}$.
12. * Sečtěte $\sum_{d|n} \varphi(d)$. (Pro tyto účely dodefinujme $\varphi(1) = 1$.)