Řešení kongruencí typu $ax \equiv b \pmod{m}$ (pro a, m nesoudělné):

- Eulerova věta: obě strany přenásobit číslem $a^{\varphi(n)-1}$;
- Bézoutova rovnost: obě strany přenásobit Bézoutovým koeficientem u z rovnosti $1 = ua + vm$;
- různé triky s krácením.

1. Najdi všechna celá čísla x, pro která platí $58x \equiv 2 \pmod{34}$.

2. Najdi všechna celá čísla x, pro která platí $21x + 5 \equiv 0 \pmod{29}$.

3. Najdi všechna celá čísla x, pro která platí $56x \equiv 1 \pmod{221}$.

4. * Vyřeš kongruenci $(a+b)x \equiv a^2 + b^2 \pmod{ab}$, kde $a, b \in \mathbb{N}$ nesoudělné.

5. (Wilsonova věta) Dokažte, že číslo p je prvočíslo právě tehdy, když

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Návod: 1) Pro každé $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ existuje $b \in \{1, \ldots, p-1\}$ takové, že $ab \equiv 1 \pmod{p}$. 2) Pokud $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$, pak $a \equiv 1 \pmod{p}$ nebo $a \equiv -1 \pmod{p}$.

Čínská věta o zbytcích. Nechť $m_1, \ldots, m_n$ jsou po dvou nesoudělná přirozená čísla. Pak pro každá $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}$ existuje právě jedno $x \in \{0, \ldots, m_1 \cdot \ldots \cdot m_n - 1\}$, které řeší soustavu kongruencí

$$x \equiv u_1 \pmod{m_1}, \quad \ldots, \quad x \equiv u_n \pmod{m_n}.$$

Postup pro nalezení x v případě dvou podmínek $x \equiv u \pmod{m}$ a $x \equiv v \pmod{n}$: položíme

$$x = u + my,$$

přičemž y spočteme tak, aby platilo $u + my \equiv v \pmod{n}$, tj.

$$my \equiv v - u \pmod{n}.$$

6. Generál Chuan-wen poslal do bitvy tisíc vojáků. Po bitvě chtěl zjistit, kolik se jich vrátilo. Nechal je tedy nastoupit do řad po pěti a zjistil, že tři zbyli stranou. Pak je nechal nastoupit do řad po šesti, to zbyli také tři, a pak ještě po sedmi, to zbylo šest. Nakonec je nechal nastoupit po jedenácti a nezbyl žádný. Kolik vojáků přežilo bitvu?

7. Vyřeš soustavu $x \equiv -3 \pmod{49}$, $x \equiv 2 \pmod{11}$, $3x \equiv 5 \pmod{7}$.

8. Vyřeš soustavu $2x \equiv 7 \pmod{33}$, $x \equiv 3 \pmod{63}$.

9. Pro která $n \in \mathbb{N}$ platí $3n + 4 | 7n + 1$?

10. * Vyřeš $23941x \equiv 915 \pmod{3564}$. Návod: $3564 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11$.