**1.** Dokaž, že pro žádné $n \in \mathbb{N}$ nejde číslo $6n+5$ vyjádřit jako součet dvou prvočísel.

**2.** Najdi všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že obě čísla $2^n - 1, 2^n + 1$ jsou prvočísla.

**3.** Existuje nekonečně mnoho složených čísel tvaru $n^2 + n + 43$, kde $43 \nmid n$?

**4.** Součet čtverců (druhých mocnin) čísel $n, n+1$ dává vždy zbytek 1 po dělení 4.

**5.** * Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel.

**6.** * Dokažte, že mezi každým $n$ a $n!$ existuje prvočíslo.

**Základní věta aritmetiky.**
Pro každé přirozené číslo $n$ existují prvočísla $p_1, \dots, p_m$ a exponenty $k_1, \dots, k_m$ tak, že

$$n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}.$$

Tato čísla jsou určena jednoznačně až na pořadí.

**Dělení se zbytkem.**
Pro každé $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, existují právě jedny $q, r \in \mathbb{N}$ splňující

$$a = bq + r, \qquad r < b.$$

**Bézoutova rovnost.**
Pro každé $a, b \in \mathbb{N}$ existují $u, v \in \mathbb{Z}$ splňující

$$\mathrm{NSD}(a, b) = u \cdot a + v \cdot b.$$

**Eukleidův algoritmus.**

- `VSTUP:` $a, b$.
- `VÝSTUP:` $\mathrm{NSD}(a, b)$ a Bézoutovy koeficienty.
- $a_0 = a \quad (u_0, v_0) = (1, 0)$
  $a_1 = b \quad (u_1, v_1) = (0, 1)$
  $a_{i+1} = a_{i-1} \bmod a_i \quad (u_{i+1}, v_{i+1}) = (u_{i-1}, v_{i-1}) - (a_{i-1} \operatorname{div} a_i)(u_i, v_i)$
  Pokud $a_{i+1} = 0$, odpověz $a_i$, $u_i$, $v_i$.

**7.** Spočtěte $\mathrm{NSD}(1023, 96)$ a $\mathrm{NSD}(252, 180)$ včetně Bézoutových koeficientů.

**8.** V závislosti na $n \in \mathbb{Z}$ spočti $(2n-1, 3n+1)$.

**9.** Spočti $\mathrm{NSD}(2^{63} - 1, 2^{98} - 1)$.

**10.** Každé přirozené $n > 6$ jde napsat jako součet dvou nesoudělných čísel (různých od 1).

**11.** Pro všechna $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a \neq c$ platí $a - c | ab + cd \iff a - c | ad + bc$.

**12.** * Kolik je $\mathrm{NSD}(2^n - 1, 2^m - 1)$?

**13.** * Pokud pro přirozená čísla $a, b, c, d$ platí $ab = cd$, pak je číslo $a^n + b^n + c^n + d^n$ složené.

**14.** * Pro každé $k > 1$ existuje nekonečně mnoho $n$ takových, že $2^{2^n} + k$ je složené číslo. Jak je tomu pro $k = 1$?