Všude předpokládáme prvočíselný rozklad $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$.

Möbiova funkce:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } p^2 \mid n \text{ pro nějaké prvočíslo } p, \\ (-1)^m & \text{jinak} \end{cases}$$

Připomeňme, že funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se nazývá *multiplikativní*, pokud $f(1) = 1$ a pro a, b nesoudělná platí

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

Multplikativní funkce jsou např. φ (Eulerova), σ (součet dělitelů), δ (počet dělitelů), ale také identita, konstanta 1, a také μ (Möbiova). V úlohách se může hodit následující pozorování: jsou-li f, g multiplikativní a $h = \sum_{d|n} f(d)g(d)$, pak h je také multiplikativní.

Pro multiplikativní funkce je často snadné nalézt vzorec, protože

$$f(p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}) = f(p_1^{k_1}) \cdot \ldots \cdot f(p_m^{k_m})$$

a spočítat hodnotu $f(p^k)$ zpravidla nebývá těžké.

1. Spočtěte $\sum_{d|n} |\mu(d)|$.

2. Spočtěte $\sum_{d|n} \mu(d)$.

3. Spočtěte $\sum_{d|n} \mu(d)\delta(d)$.

4. Spočtěte $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d)$.

5. Spočtěte $\sum_{d|n} \mu(d)d$.

6. Dokažte, že $\sum_{d|n} \mu(d)\varphi(d) = 0$ pro všechna sudá n.

Möbiův inverzní vzorec:

Pokud $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, pak $f(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})g(d)$.

7. Spočtěte $\sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\delta(d)$.

8. Spočtěte $\sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})\sigma(d)$.

9. Z vlastnosti $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ odvoďte známý vzorec pro $\varphi(n)$.

10. * Buď $S(n)$ součet čtverců čísel menších a nesoudělných s n. Dokažte, že $S(n) = (n^2/6) \cdot \sum_{d|n} \mu(d)(2n/d + d/n + 3)$.

11. Dokažte Möbiův inverzní vzorec.

12. * Dokažte $\sum_{d|n} (-1)^d \varphi(d) = 0$.