1. teorie (1 bod)

Formulujte princip matematické indukce.

Napište základní větu aritmetiky.

Napište Bézoutovu rovnost v oboru celých čísel.

Definujte, co znamená zápis $a \equiv b \pmod{n}$, a uveďte základní vlastnosti.

Napište Čínskou větu o zbytcích (pro celá čísla).

Definujte Eulerovu funkci a uveďte vzorec pro její výpočet.

Definujte Eulerovu funkci a napište Eulerovu větu.

2. teorie (1 bod)

Definujte pojem polynomu (jedné proměnné) nad obecným oborem integrity. Co je to absolutní a vedoucí člen?

Definujte kořen daného polynomu a uveďte tuto definici do souvislosti s dělitelností.

Definujte kořen daného polynomu a uveďte větu o počtu kořenů daného polynomu.

Definujte pojem algebraického a transcendentního čísla. Kterých je více?

Definujte pojem algebraického a transcendentního čísla. Uveďte příklady.

Napište kritérium existence racionálního kořene pro celočíselné polynomy.

Napište větu o interpolaci.

Definujte těleso.

Definujte obor integrity.

3. teorie (1 bod)

Definujte v daném oboru integrity následující značení: $a|b$, $a||b$, a je invertibilní.

Definujte ireducibilní prvek.

Definujte největší společný dělitel a nejmenší společný násobek v oboru **R**.

Definujte největší společný dělitel a nejmenší společný násobek v oboru **R**.

Definujte Gaussovský obor. Vysvětlete, co přesně rozumíme jednoznačností rozkladu.

Definujte Gaussovský obor. Vysvětlete, co přesně rozumíme jednoznačností rozkladu.

Definujte Eukleidovskou normu a Eukleidovský obor.

Formulujte Eukleidův algoritmus v obecném Eukleidovském oboru **R**.

Formulujte Eukleidův algoritmus v oboru celých čísel.

Formulujte Eukleidův algoritmus v oboru Gaussových celých čísel.

Formulujte Eukleidův algoritmus v oboru polynomů nad tělesem.

4. teorie (1 bod)

Definujte podobor. Napište, co značí $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$.

Definujte zobrazení ν na oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$ a napište jeho základní vlastnosti.

Uveďte algoritmus dělení se zbytkem v oboru Gaussových celých čísel.

Platí pro obor $\mathbb{Z}[x]$ analogie Základní věty aritmetiky? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Platí pro obor $\mathbb{Q}[x]$ analogie Základní věty aritmetiky? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Platí pro obor $\mathbb{Z}[i]$ analogie Základní věty aritmetiky? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Platí pro obor $\mathbb{Z}[x]$ Bézoutova rovnost? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Platí pro obor $\mathbb{Q}[x]$ Bézoutova rovnost? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Platí pro obor $\mathbb{Z}[i]$ Bézoutova rovnost? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Je obor $\mathbb{Q}$ Gaussovský? Je Eukleidovský? Stručně zdůvodněte. Pokud je Eukleidovský, uveďte normu.

Je obor $\mathbb{Z}$ Gaussovský? Je Eukleidovský? Stručně zdůvodněte. Pokud je Eukleidovský, uveďte normu.

Je obor $\mathbb{Z}[i]$ Gaussovský? Je Eukleidovský? Stručně zdůvodněte. Pokud je Eukleidovský, uveďte normu.

Je obor $\mathbb{Z}[x]$ Gaussovský? Je Eukleidovský? Stručně zdůvodněte. Pokud je Eukleidovský, uveďte normu.

Je obor $\mathbb{Q}[x]$ Gaussovský? Je Eukleidovský? Stručně zdůvodněte. Pokud je Eukleidovský, uveďte normu.

Co jsou to Gaussova celá čísla? Tvoří Gaussovský obor? Tvoří Eukleidovský obor? Stručně zdůvodněte. Pokud je to Eukleidovský obor, uveďte normu.

5. teorie (1 bod)

Uveďte definici abelovské grupy.

Uveďte definici grupy.

Definujte podgrupu dané grupy $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$.

Buď $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa a $X \subseteq G$. Co značí $\langle X \rangle_{\mathbf{G}}$?

Buď $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ a $\mathbf{H} = (H, *, ', e)$ grupy. Definujte homomorfismus $\mathbf{G} \to \mathbf{H}$.

Buď $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ a $\mathbf{H} = (H, *, ', e)$ grupy a $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ homomorfismus. Co se rozumí jeho jádrem a obrazem?

Definujte řád prvku a grupy $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$.

Definujte grupu $\mathbb{Z}_n^*$. Jaké má prvky?

Pro daný obor integrity $\mathbf{R}$, definujte grupu $\mathbf{R}^*$.

Uveďte nějaký postup na výpočet inverzního prvku v grupě $\mathbb{Z}_n^*$.

6. teorie (1 bod)

Napište, co rozumíme rozkladem grupy $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ podle podgrupy $\mathbf{H}$. Co rozumíme rozkladovou třídou a transverzálou?

Napište, co rozumíme rozkladem grupy $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ podle podgrupy $\mathbf{H}$ a uveďte základní vlastnosti.

Napište Lagrangeovu větu. Co přesně značí $[\mathbf{G} : \mathbf{H}]$?

Jaký je vztah řádu grupy a řádů jejích prvků?

Jaký je vztah řádu grupy a řádů jejích podgrup?

Definujte relaci tranzitivity a orbitu daného působení grupy $\mathbf{G}$ na množině X.

Nechť grupa $\mathbf{G}$ působí na množinu X. Definujte X_g a G_x pro dané $g \in G$ a $x \in X$. Co je to pevný bod?

Nechť grupa $\mathbf{G}$ působí na množinu X a buď $x \in X$. Napište vztah mezi velikostmi G, G_x a $[x]$.

Napište Burnsideovu větu.

Definujte cyklickou grupu.

Uveďte všechny (až na izomorfismus) cyklické grupy.

Kolik má daná cyklická grupa generátorů?

7. příklady (1 bod)

Existuje abelovská grupa s neabelovskou podgrupou? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje neabelovská grupa s abelovskou vlastní podgrupou? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{S}_3$ abelovská? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{A}_4$ (=sudé permutace) abelovská? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{A}_3$ (=sudé permutace) abelovská? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{D}_8$ (symetrie čtverce) abelovská? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Z}^*$ abelovská? Stručně zdůvodněte.

Je $(\mathbb{Z}, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa? Stručně zdůvodněte.

Je $(\mathbb{Q}, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa? Stručně zdůvodněte.

Je $(\{0, 1, -1\}, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa? Stručně zdůvodněte.

Je $(\{1, -1\}, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa? Stručně zdůvodněte.

Tvoří matice s násobením grupu? Stručně zdůvodněte.

Tvoří všechny funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se skládáním grupu? Stručně zdůvodněte.

Existuje neabelovská 6-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje neabelovská 7-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje neabelovská 8-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje neabelovská 12-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje neabelovská nekonečná grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje cyklická nekonečná grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje cyklická osmiprvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje necyklická osmiprvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje necyklická 11-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 100-prvková grupa obsahující prvek řádu 12? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 99-prvková grupa obsahující prvek řádu 8? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 99-prvková grupa obsahující prvek řádu 9? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 74-prvková grupa obsahující prvek řádu 10? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 64-prvková grupa, která má 16-prvkovou podgrupu? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 70-prvková grupa, která má 15-prvkovou podgrupu? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 60-prvková grupa, která má 15-prvkovou podgrupu? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

8. příklady (1 bod)

Je grupa $\mathbf{S}_3$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{S}_4$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{A}_4$ (= sudé permutace) cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{D}_8$ (= grupa všech symetrií čtverce) cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa všech otočení krychle cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa všech otočení čtverce cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa všech otočení pětiúhelníka cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Q}$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Q}^*$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Z}$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Z}_9$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Z}_8^*$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Z}_{10}^*$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Z}^*$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Z}[i]^*$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je podgrupa $3\mathbb{Z}$ grupy $\mathbb{Z}$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda iracionální čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{C}$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda iracionální čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{C}^*$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda celá čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{C}$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda celá čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{C}^*$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda racionální čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{R}$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda kladná čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{R}$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda kladná čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{R}^*$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda sudá tvoří celá čísla podgrupu grupy $\mathbb{Q}$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda sudá čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Q}^*$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda přirozená čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Q}$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda permutace splňující $\pi^2 = id$ tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_3$.

Rozhodněte, zda liché permutace tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_n$.

Rozhodněte, zda množina $\{1, 7\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}_9^*$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda množina $\{1, 3\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}_{10}^*$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda množina $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}_{11}^*$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda množina $\{1, 3, 9\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}_{13}^*$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda množina $\{1, 4, 7\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}_9^*$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda množina $\{1, 5\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}_{12}^*$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda lichá čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}$. Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda otočení tvoří podgrupu grupy $\mathbf{D}_8$ (= grupa všech symetrií čtverce). Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda osové symetrie tvoří podgrupu grupy $\mathbf{D}_8$ (= grupa všech symetrií čtverce). Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda otočení tvoří podgrupu grupy $\mathbf{D}_{10}$ (= grupa všech symetrií pětiúhelníka). Stručně zdůvodněte.

Rozhodněte, zda osové symetrie tvoří podgrupu grupy $\mathbf{D}_{10}$ (= grupa všech symetrií pětiúhelníka). Stručně zdůvodněte.

9. příklady (1 bod)

Určete řád prvku 5 v grupě $\mathbb{Z}_{62}^*$.

Určete řád prvku 2 v grupě $\mathbb{Z}_{63}^*$.

Určete řád prvku 3 v grupě $\mathbb{Z}_{80}^*$.

Určete řád prvku 12 v grupě $\mathbb{Z}_{61}$.

Určete řád prvku 44 v grupě $\mathbb{Z}_{46}$.

Určete řád prvku 27 v grupě $\mathbb{Z}_{30}$.

Generuje prvek 8 grupu $\mathbb{Z}_{50}$? Generuje prvek 8 grupu $\mathbb{Z}_{51}$? Stručně zdůvodněte.

Generuje prvek 6 grupu $\mathbb{Z}_{70}$? Generuje prvek 6 grupu $\mathbb{Z}_{72}$? Stručně zdůvodněte.

Generuje prvek 2 grupu $\mathbb{Z}_9^*$? Stručně zdůvodněte.

Generuje prvek 4 grupu $\mathbb{Z}_{15}^*$? Stručně zdůvodněte.

Generuje prvek 7 grupu $\mathbb{Z}_{50}^*$? Stručně zdůvodněte.

Kolik podgrup má grupa $\mathbb{Z}_8$?

Kolik podgrup má grupa $\mathbb{Z}_{10}$?

Kolik podgrup má grupa $\mathbb{Z}_{12}$?

Kolik podgrup má grupa $\mathbb{Z}_6^*$?

Kolik podgrup má grupa $\mathbf{S}_3$?

Kolik prvků řádu 4 má grupa $\mathbf{S}_4$?

Kolik prvků řádu 5 má grupa $\mathbf{S}_4$?

Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbf{S}_5$?

Kolik prvků řádu 4 má grupa $\mathbb{Z}_{12}$?

Kolik prvků řádu 5 má grupa $\mathbb{Z}_{25}$?

Kolik prvků řádu 9 má grupa $\mathbb{Z}_{18}$?

Kolik prvků řádu 13 má grupa $\mathbb{Q}^*$?

Kolik prvků řádu 2 má grupa $\mathbb{Q}^*$?

Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbb{C}^*$?

Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbb{Z}_9^*$?

Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbb{Z}_{12}^*$?

Kolik prvků řádu 2 má grupa $\mathbb{Z}_{15}^*$?

Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbb{Z}_{14}^*$?

Kolik prvků řádu nekonečno má grupa $\mathbb{Z}^*$?

Kolik prvků řádu 2 má grupa $\mathbb{Z}[i]^*$?

Kolik prvků řádu 4 má grupa $\mathbf{D}_8$ (= grupa všech symetrií čtverce)?

Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbf{D}_8$ (= grupa všech symetrií čtverce)?

Kolik prvků řádu 2 má grupa $\mathbf{D}_8$ (= grupa všech symetrií čtverce)?

Kolik prvků řádu 5 má grupa $\mathbf{D}_{10}$ (= grupa všech symetrií pětiúhelníka)?

Kolik prvků řádu 4 má grupa sudých permutací $\mathbf{A}_4$?

Kolik prvků řádu 3 má grupa sudých permutací $\mathbf{A}_4$?

Kolik prvků řádu 2 má grupa $\mathbf{S}_4$?

Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbf{S}_4$?

Kolik prvků řádu 4 má grupa $\mathbf{S}_4$?

Kolik prvků řádu 6 má grupa $\mathbf{S}_5$?

Kolik prvků řádu 5 má grupa $\mathbf{S}_5$?

Rozhodněte, zda grupa $\mathbf{S}_6$ obsahuje prvek řádu a) 5, b) 8. Pokud ano, uveďte příklad.

Rozhodněte, zda grupa $\mathbf{S}_5$ obsahuje prvek řádu a) 5, b) 6. Pokud ano, uveďte příklad.

Rozhodněte, zda grupa $\mathbf{S}_5$ obsahuje prvek řádu a) 4, b) 7. Pokud ano, uveďte příklad.

Rozhodněte, zda grupa $\mathbf{A}_4$ (= sudé permutace) obsahuje prvek řádu a) 4, b) 5. Pokud ano, uveďte příklad.

Rozhodněte, zda grupa $\mathbf{A}_5$ (= sudé permutace) obsahuje prvek řádu a) 4, b) 5. Pokud ano, uveďte příklad.

Určete řád prvku $(1\ 2\ 5)(3\ 6)(4\ 7)$ v grupě $\mathbf{S}_7$.

Určete řád prvku $(3\ 1\ 2\ 5)(7\ 6)(4)$ v grupě $\mathbf{S}_7$.

Určete řád prvku $(3\ 1\ 6\ 5)(7\ 4\ 2\ 8)$ v grupě $\mathbf{S}_8$.

Určete řád prvku $(1\ 3\ 9\ 5)(2\ 4\ 8)(6\ 7)$ v grupě $\mathbf{S}_9$.

Určete řád prvku $(1\ 3)(4\ 8\ 7\ 6\ 5)$ v grupě $\mathbf{S}_8$.

10. příklady (1 bod)

Vypište orbity působení grupy $\mathbf{D}_{10}$ všech symetrií pravidelného pětiúhelníka na množině jeho vrcholů.

Vypište orbity působení grupy $\mathbf{D}_{10}$ všech symetrií pravidelného pětiúhelníka na množině jeho hran.

Vypište orbity působení grupy $\mathbf{S}_8$ na množině $\{1, \dots, 8\}$.

Vypište orbity působení grupy $\mathbf{S}_6$ na množině $\{(i, j) : i, j = 1, \dots, 6\}$.

Nechť grupa $\mathbf{D}_{10}$ všech symetrií pravidelného pětiúhelníka působí na množině jeho vrcholů. Kolik pevných bodů má daná osová symetrie?

Nechť grupa $\mathbf{D}_{10}$ všech symetrií pravidelného pětiúhelníka působí na množině jeho hran. Kolik pevných bodů má daná osová symetrie?

Nechť grupa $\mathbf{D}_{12}$ všech symetrií pravidelného šestiúhelníka působí na množině jeho hran. Kolik pevných bodů má středová symetrie?

Kolik prvků má stabilizátor bodu 5 v působení grupy $\mathbf{S}_{10}$ na množinu $\{1, \dots, 10\}$?

Kolik prvků má stabilizátor bodu 2 v působení grupy $\mathbf{S}_6$ na množinu $\{1, \dots, 6\}$?

Kolik prvků má stabilizátor daného vrcholu v působení grupy $\mathbf{D}_{12}$ všech symetrií pravidelného šestiúhelníka na množině jeho vrcholů?

Kolik prvků má stabilizátor dané hrany v působení grupy $\mathbf{D}_{12}$ všech symetrií pravidelného šestiúhelníka na množině jeho hran?

Kolik prvků má stabilizátor daného vrcholu v působení grupy $\mathbf{D}_{10}$ všech symetrií pravidelného pětiúhelníka na množině jeho vrcholů?

Kolik prvků má stabilizátor dané hrany v působení grupy $\mathbf{D}_{10}$ všech symetrií pravidelného pětiúhelníka na množině jeho hran?

Uvažujme působení grupy otočení čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 3×3 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde jsou všechna políčka bílá?

Uvažujme působení grupy otočení čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 3×3 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde je prostřední políčko černé a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy otočení čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 3×3 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde je jedno rohové políčko černé a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy otočení čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 4×4 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde je jedno políčko černé a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy otočení čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 4×4 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde jsou rohová políčka černá a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy $\mathbf{D}_8$ všech symetrií čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 3×3 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde jsou všechna políčka bílá?

Uvažujme působení grupy $\mathbf{D}_8$ všech symetrií čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 3×3 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde je prostřední políčko černé a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy $\mathbf{D}_8$ všech symetrií čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 3×3 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde je jedno rohové políčko černé a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy $\mathbf{D}_8$ všech symetrií čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 4×4 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde je jedno vnitřní políčko černé a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy $\mathbf{D}_8$ všech symetrií čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 4×4 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde jsou rohová políčka černá a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy $\mathbf{GL}_n(\mathbf{T})$ na vektorový prostor T^n, kde akce matice A na vektoru v je definovaná jako Av. Vypište orbity.

Nechť grupa $\mathbf{G}$ všech izometrií v rovině (tj. všechna otočení, translace a osové symetrie) působí na rovinu $X = \mathbb{R}^2$. Vypište orbity.

Nechť grupa $\mathbf{G}$ všech izometrií v rovině (tj. všechna otočení, translace a osové symetrie) působí na rovinu $X = \mathbb{R}^2$. Vypište prvky G_x pro daný bod x.

Nechť grupa $\mathbf{G}$ všech izometrií v rovině (tj. všechna otočení, translace a osové symetrie) působí na rovinu $X = \mathbb{R}^2$. Vypište prvky X_g pro dané otočení g.

Nechť grupa $\mathbf{G}$ všech izometrií v rovině (tj. všechna otočení, translace a osové symetrie) působí na rovinu $X = \mathbb{R}^2$. Vypište prvky X_g pro danou translaci g.

Nechť grupa $\mathbf{G}$ všech izometrií v rovině (tj. všechna otočení, translace a osové symetrie) působí na rovinu $X = \mathbb{R}^2$. Vypište prvky X_g pro danou osovou symetrii g.

11. příklady (1 bod)

Je číslo $\sqrt[3]{2}$ transcendentní? Stručně zdůvodněte.
Je číslo $\sqrt[3]{3}$ transcendentní? Stručně zdůvodněte.
Je číslo $1 - \sqrt{2}$ transcendentní? Stručně zdůvodněte.
Je číslo $2 + \sqrt{2}$ transcendentní? Stručně zdůvodněte.
Je číslo $i + 1$ transcendentní? Stručně zdůvodněte.
Je číslo $e + 1$ transcendentní? Stručně zdůvodněte.
Najděte všechny racionální kořeny polynomu $x^3 - x^2 - 3x + 2$.
Najděte všechny racionální kořeny polynomu $2x^3 - 3x + 1$.
Najděte všechny racionální kořeny polynomu $2x^3 - x^2 + 2x - 1$.
Najděte všechny racionální kořeny polynomu $2x^4 - 4x$.
Najděte všechny racionální kořeny polynomu $2x^3 - x^2 + 4x - 2$.
Je polynom 5 ireducibilní a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Je polynom 6 ireducibilní a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Je polynom $2x$ ireducibilní a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Je polynom $2x + 4$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Je polynom $2x^2 + x - 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[x]$?
Je polynom $2x^2 + x - 2$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[x]$?
Je polynom $4x^2 - 4x + 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[x]$?
Je polynom $x^4 + 2x^2 + 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Je polynom $x^4 + 2x^2 + 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$?
Je polynom $x^4 + 5x^2 + 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}_7[x]$?
Je polynom $x^3 + x^2 + 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}_2[x]$?
Je polynom $x^2 + 1$ ireducibilní v oboru $(\mathbb{Z}[i])[x]$?
Platí $6x^2 - 2x + 4 \parallel -9x^2 + 3x - 6$ a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Platí $6x^2 - 2x + 4 \parallel -9x^2 + 3x - 5$ a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Platí $2x^2 + 1 \parallel x^2 + 2$ a) v oboru $\mathbb{Q}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$?
Platí $2x^2 + 1 \parallel x^2 + 2$ a) v oboru $\mathbb{Q}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Z}_5[x]$?
Platí $3x^2 + 2x \parallel 3x + 2$ a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Platí $x^2 + 2x \parallel 2x + 1$ a) v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$, b) v oboru $\mathbb{Z}_5[x]$?
Je polynom $2x$ <u>invertibilní</u> a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Je polynom 6 <u>invertibilní</u> a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?

12. příklady (1 bod)

Je prvek $5 + i$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek $3 + 5i$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek $7 - 2i$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek $4 + 5i$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek i ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek $i\sqrt{2}$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$?
Je prvek $5 + \sqrt{2}$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?
Je prvek $3 + 2\sqrt{2}$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?
Je prvek $1 + 3\sqrt{2}$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?

Je prvek $1 + i\sqrt{2}$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$?
Je prvek $5 + i$ invertibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek $3 - 2i$ invertibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek $1 + \sqrt{2}$ invertibilní v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?
Je prvek $1 + i\sqrt{2}$ invertibilní v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$?
Platí $2 + i \parallel 2 - i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Platí $2 + i \parallel -1 + 2i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Platí $1 + i \parallel 1 - i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Platí $7 + 3i \parallel -5 - 4i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Platí $8 + 3i \parallel 3 - 8i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Spočtěte podíl a zbytek $4 + 5i : 1 + i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte podíl a zbytek $5 - 2i : 2 + i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte podíl a zbytek $2 + 5i : 2 - i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte podíl a zbytek $3 + 7i : 4$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte podíl a zbytek $15 : 3 + i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.

13. úlohy (2 body)

Spočtěte $13^{13^{13}} + 15^{15^{15}}$ mod 17.
Spočtěte 123^{321} mod 8.
Spočtěte 5^{444} mod 132.
Spočtěte poslední dvě cifry čísla 13^{282}.
Spočtěte poslední dvě cifry čísla 11^{441}.
Spočtěte poslední dvě cifry čísla 11^{442}.
Spočtěte poslední tři cifry čísla 3^{402}.
Spočtěte poslední tři cifry čísla 3^{403}.
Spočtěte <u>předposlední</u> cifru čísla 27^{4321}.
Spočtěte <u>předposlední</u> cifru čísla 27^{3321}.
Spočtěte poslední cifru čísla 3^{2007}.
Spočtěte 10^{9^8} mod 6.
Spočtěte $10^{11^{12}}$ mod 6.
Spočtěte 9^{8^7} mod 7.
Spočtěte 9^{7^5} mod 7.
Spočtěte $11^{114} \cdot 13^{76}$ mod 6.
Spočtěte $8^{1111} + 12^{1111}$ mod 10.
Spočtěte $8^{333} + 12^{333}$ mod 10.
Spočtěte $10^{444} + 14^{666}$ mod 12.
Spočtěte $10^{333} + 14^{333}$ mod 12.
Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $2x \equiv 2 \pmod 3$, $x \equiv 1 \pmod 4$, $3x \equiv 1 \pmod 5$.
Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $x \equiv 1 \pmod 4$, $x \equiv 2 \pmod 5$, $2x \equiv 3 \pmod 7$.
Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $x \equiv 1 \pmod 2$, $x \equiv 4 \pmod 5$, $x \equiv 6 \pmod 7$.
Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $x \equiv 0 \pmod 4$, $x \equiv 2 \pmod 5$, $x \equiv 3 \pmod 7$.
Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $x \equiv 1 \pmod 5$, $x \equiv 0 \pmod 6$, $x \equiv 4 \pmod 7$.
Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $x \equiv 3 \pmod 4$, $3x \equiv 4 \pmod{11}$.

Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $2x \equiv 5 \pmod 7$, $2x \equiv 5 \pmod 9$.
Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $3x \equiv 5 \pmod 8$, $x \equiv 5 \pmod 9$.
Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $2x \equiv 6 \pmod 7$, $x \equiv 3 \pmod 9$.
Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $3x \equiv 7 \pmod{10}$, $2x \equiv 8 \pmod{11}$.
Najděte $0 \leq x \leq 31$ takové, že $28x \equiv 5 \pmod{31}$.
Najděte $0 \leq x \leq 33$ takové, že $29x \equiv 5 \pmod{33}$.
Najděte $0 \leq x \leq 35$ takové, že $9x \equiv 5 \pmod{35}$.
Najděte $0 \leq x \leq 37$ takové, že $4x \equiv 5 \pmod{37}$.
Spočtěte hodnotu Eulerovy funkce $\varphi(2250)$.
Spočtěte hodnotu Eulerovy funkce $\varphi(2310)$.
Spočtěte Bézoutovy koeficienty pro NSD(25,33).
Spočtěte Bézoutovy koeficienty pro NSD(21,30).
Spočtěte Bézoutovy koeficienty pro NSD(20,32).
Spočtěte Bézoutovy koeficienty pro NSD(19,27).
Spočtěte 11^{-1} v grupě $\mathbb{Z}_{24}^*$.
Spočtěte 13^{-1} v grupě $\mathbb{Z}_{19}^*$.
Spočtěte 5^{-1} v grupě $\mathbb{Z}_{22}^*$.
Spočtěte 7^{-1} v grupě $\mathbb{Z}_{23}^*$.

14. úlohy (2 body)

Spočtěte $\mathrm{NSD}(10, 6+8i)$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$
Spočtěte $\mathrm{NSD}(5+i, 2+3i)$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte $\mathrm{NSD}(2+4i, 3-3i)$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte $\mathrm{NSD}(3+4i, 5)$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte $\mathrm{NSD}(3-4i, 5)$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte $\mathrm{NSD}(3-11i, 1-7i)$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte $\mathrm{NSD}(3-11i, 1+7i)$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte $\mathrm{NSD}(7+6i, 9+2i)$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Rozložte prvek 10 na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Rozložte prvek 15 na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Rozložte prvek $1+18i$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Rozložte prvek $-3+11i$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Rozložte prvek $4+10i$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Rozložte prvek $-6+8i$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Rozložte prvek $11-7i$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Rozložte prvek $16+13i$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte $\mathrm{NSD}(x^3-4x^2+x-4, x^3+4x^2+x+4)$ v oboru $\mathbb{Q}[x]$.
Spočtěte $\mathrm{NSD}(x^3+x^2-2x-2, x^4+2x^2-8)$ v oboru $\mathbb{Q}[x]$.
Spočtěte $\mathrm{NSD}(x^3+2x^2+2x+1, x^3+x^2-2x-2)$ v oboru $\mathbb{Q}[x]$.
Spočtěte $\mathrm{NSD}(x^4+2x^3+2x+1, x^4+x^2+1)$ v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$.
Spočtěte $\mathrm{NSD}(x^4+1, x^4+x^2+2x)$ v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$.
Spočtěte $\mathrm{NSD}(x^4+1, x^4+x^2+2x)$ v oboru $\mathbb{Z}_5[x]$.
Spočtěte $\mathrm{NSD}(x^3+1, x^4+x^2+2x)$ v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$.
Rozložte polynom $6x^2-12x+6$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[x]$.

Rozložte polynom $x^3 - 4x^2 + x - 4$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Q}[x]$.
Rozložte polynom $x^3 + x^2 - 2x - 2$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Q}[x]$.
Rozložte polynom $2x^3 + 2x^2 - 4x - 4$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[x]$.
Rozložte polynom $x^4 + 2x^2 + 1$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[x]$.
Rozložte polynom $x^4 - 4$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[x]$.
Rozložte polynom $x^4 + 2$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$.
Rozložte polynom $x^5 + x^2 + x + 1$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}_2[x]$.
Rozložte polynom $x^4 + 3x^2 + 2$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}_5[x]$.
Rozložte polynom $x^5 + x^3 + x^2 + 1$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$.
Rozložte polynom $4x^4 + x^2 + 1$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}_5[x]$.
Rozložte polynom $2x^3 + x^2 + 2x + 1$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[x]$.
Rozložte polynom $2x^3 + x^2 - 2x - 1$ na součin ireducibilních v oboru $\mathbb{Z}[x]$.

15. úlohy (2 body)

Spočtěte podgrupu generovanou prvkem 2 v grupě $\mathbb{Q}^*$. Je 1433/16 prvkem této grupy?
Spočtěte podgrupu generovanou prvky $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ v grupě $\mathbb{Q}$. Je 137/4 prvkem této grupy?
Spočtěte podgrupu generovanou prvky $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ v grupě $\mathbb{Q}^*$. Je 64/9 prvkem této grupy?
Spočtěte podgrupu generovanou prvky $3, \frac{3}{4}$ v grupě $\mathbb{Q}^*$. Je 64/9 prvkem této grupy?
Spočtěte podgrupu generovanou prvky $-\frac{3}{4}, \frac{2}{5}$ v grupě $\mathbb{Q}$. Je 127/10 prvkem této grupy?
Spočtěte podgrupu generovanou prvky $21, 30$ v grupě $\mathbb{Z}$. Je 137 prvkem této grupy?
Spočtěte podgrupu generovanou prvky $-12, 23$ v grupě $\mathbb{Z}$. Je 4567 prvkem této grupy?
Spočtěte podgrupu generovanou prvky $9, 15$ v grupě $\mathbb{Z}$. Je 4567 prvkem této grupy?
Vypište prvky podgrupy generované prvky $9, 15$ v grupě $\mathbb{Z}_{45}$.
Vypište prvky podgrupy generované prvky $9, 15$ v grupě $\mathbb{Z}_{35}$.
Vypište prvky podgrupy generované prvkem 16 v grupě $\mathbb{Z}_{21}$.
Vypište prvky podgrupy generované prvkem 2 v grupě $\mathbb{Z}_{21}^*$.
Vypište prvky podgrupy generované prvky $2, 11$ v grupě $\mathbb{Z}_{21}^*$.
Vypište prvky podgrupy generované prvkem 7 v grupě $\mathbb{Z}_{25}^*$.
Vypište prvky podgrupy generované permutacemi $(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)$ v grupě $\mathbf{S}_4$.
Vypište prvky podgrupy generované permutacemi $(1\ 2)(3\ 4), (1\ 2)$ v grupě $\mathbf{S}_4$.
Vypište prvky podgrupy generované permutací $(1\ 2\ 3)(4\ 5)$ v grupě $\mathbf{S}_5$.
Vypište prvky podgrupy generované permutací $(1\ 2\ 5\ 4)$ v grupě $\mathbf{S}_5$.
Rozhodněte, zda permutace splňující $\pi^3 = id$ tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_4$.
Rozhodněte, zda permutace splňující $\pi^3 = id$ tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_3$.
Rozhodněte, zda permutace splňující $\pi^4 = id$ tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_4$.
Rozhodněte, zda $\{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), id\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_4$.
Je zobrazení $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$, $z \mapsto |z|$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?
Je zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto e^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto e^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto i^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto i^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto i^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 5x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^5$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z} \to \mathbf{S}_4$, $x \mapsto (1\ 2\ 3\ 4)^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z} \to \mathbf{S}_4$, $x \mapsto (1\ 2)(3\ 4)^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto 3^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto 3^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbf{S}_4 \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto ord(x)$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto ord(x)$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^*$, $x \mapsto 2^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Q}^*$, $x \mapsto 2^x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$, $x(\cos\phi + i\sin\phi) \mapsto \phi$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \cos x + i\sin x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_{10}$, $x \mapsto x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{10}$, $x \mapsto 2x$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

Je zobrazení $\mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_5$, $x \mapsto x \bmod 5$, homomorfismus těchto grup? Pokud ano, co je jeho jádrem?

16. úlohy (2 body)

Spočtěte kolika způsoby lze obarvit políčka průhledné desky 3×3 tak, aby 7 políček bylo červených a 2 modré. Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením a převrácením desky.

Spočtěte kolika způsoby lze obarvit políčka průhledné desky 3×3 tak, aby 5 políček bylo červených a 4 modré. Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením a převrácením desky.

Spočtěte kolika způsoby lze obarvit políčka průhledné desky 3×3 tak, aby 3 políčka byly červené, 2 modré, 2 žluté a 2 zelené. Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením a převrácením desky.

Spočtěte kolika způsoby lze obarvit políčka průhledné desky 4×4 tak, aby 13 políček bylo červených a 3 modré. Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením a převrácením desky.

Spočtěte kolika způsoby lze obarvit políčka průhledné desky 4×4 tak, aby 8 políček bylo červených a 8 modrých. Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením a převrácením desky.

Spočtěte kolika způsoby lze obarvit políčka průhledné desky 4×4 dvěma barvami. Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením a převrácením desky.

Spočtěte kolika způsoby lze obarvit políčka desky 3×3 tak, aby 7 políček bylo červených a 2 modré. Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením desky.

Spočtěte kolika způsoby lze obarvit políčka desky 3×3 tak, aby 5 políček bylo červených a 4 modré. Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením desky.

Spočtěte kolika způsoby lze obarvit políčka desky 3×3 tak, aby 3 políčka byly červené, 2 modré, 2 žluté a 2 zelené. Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením desky.

Spočtěte kolika způsoby lze obarvit políčka desky 4×4 tak, aby 8 políček bylo červených a 8 modrých. Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením desky.

Spočtěte kolika způsoby lze na políčka průhledné desky 3×3 nakreslit šipku směřující k jednomu z vrcholů daného políčka. Dvě nakreslení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením a převrácením desky.

Spočtěte kolika způsoby lze na políčka desky 3×3 nakreslit šipku směřující k jednomu z vrcholů daného políčka. Dvě nakreslení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením desky.

Spočtěte kolika způsoby lze na políčka průhledné desky 3×3 nakreslit šipku směřující k středu jedné z hran daného políčka. Dvě nakreslení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením a převrácením desky.

Spočtěte kolika způsoby lze na políčka desky 3×3 nakreslit šipku směřující k k středu jedné z hran daného políčka. Dvě nakreslení považujeme za totožná, pokud lze jedno z druhého dostat otočením desky.

Kolika způsoby lze z šesti bílých a šesti modrých trojúhelníkových destiček sestavit pravidelnou šesticípou hvězdu? Dvě sestavy považujeme za totožné, pokud se liší otočením a převrácením.

Kolika způsoby lze z osmi bílých a čtyř modrých trojúhelníkových destiček sestavit pravidelnou šesticípou hvězdu? Dvě sestavy považujeme za totožné, pokud se liší otočením a převrácením.

Kolik náhrdelníků lze sestavit z 5 modrých a 3 červených kuliček? Nezáleží na poloze náhrdelníku, je možno jej převracet či otáčet.

Kolik náhrdelníků lze sestavit z 3 modrých, 3 červených a 3 žlutých kuliček? Nezáleží na poloze náhrdelníku, je možno jej převracet či otáčet.

Kolik náhrdelníků lze sestavit z 4 modrých, 3 červených a 3 žlutých kuliček? Nezáleží na poloze náhrdelníku, je možno jej převracet či otáčet.

Kolik náhrdelníků lze sestavit z 2 modrých a 7 červených kuliček? Nezáleží na poloze náhrdelníku, je možno jej převracet či otáčet.

Kolik náhrdelníků lze sestavit z 7 modrých a 3 červených kuliček? Nezáleží na poloze náhrdelníku, je možno jej převracet či otáčet.

Kolik náhrdelníků délky 9 lze sestavit kuliček dvou barev? Nezáleží na poloze náhrdelníku, je možno jej převracet či otáčet.

Kolik náhrdelníků délky 8 lze sestavit kuliček dvou barev? Nezáleží na poloze náhrdelníku, je možno jej převracet či otáčet.

Kolik náhrdelníků délky 5 lze sestavit kuliček tří barev? Nezáleží na poloze náhrdelníku, je možno jej převracet či otáčet.

Stavebnice obsahuje 5 červených a 4 zelené trojúhelníkové destičky. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého trojúhelníka o hraně 3? Dvě sestavy považujeme za totožné, pokud jednu z druhé dostaneme otočením.

Stavebnice obsahuje 4 červené a 3 zelené a 2 modré trojúhelníkové destičky. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého trojúhelníka o hraně 3? Dvě sestavy považujeme za totožné, pokud jednu z druhé dostaneme otočením.

Stavebnice obsahuje 5 červených a 4 zelené trojúhelníkové destičky. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého trojúhelníka o hraně 3? Dvě sestavy považujeme za totožné, pokud jednu z druhé dostaneme otočením nebo převrácením.

Stavebnice obsahuje 4 červené a 3 zelené a 2 modré trojúhelníkové destičky. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého trojúhelníka o hraně 3? Dvě sestavy považujeme za totožné, pokud jednu z druhé dostaneme otočením nebo převrácením.

Stavebnice obsahuje 3 červené a 3 zelené a 3 modré trojúhelníkové destičky. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého trojúhelníka o hraně 3? Dvě sestavy považujeme za totožné, pokud jednu z druhé dostaneme otočením nebo převrácením.

Stavebnice obsahuje 9 trojúhelníkových destiček, na kterých je nakreslena šipka směrem k jednomu z vrcholů. Kolika způsoby je lze sestavit do velkého trojúhelníka o hraně 3? Dvě sestavy považujeme za totožné, pokud jednu z druhé dostaneme otočením.

Stavebnice obsahuje 9 trojúhelníkových destiček, na kterých je nakreslena šipka směrem k jednomu z vrcholů (na obou stranách k stejnému). Kolika způsoby je lze sestavit do velkého trojúhelníka o hraně 3? Dvě sestavy považujeme za totožné, pokud jednu z druhé dostaneme otočením nebo převrácením.

17. lehký důkaz (10 bodů)

Formulujte a dokažte základní větu aritmetiky. Předpokládejte platnost Bézoutovy rovnosti.

Formulujte Eukleidův algoritmus v oboru celých čísel, dokažte jeho správnost a odvoďte Bézoutovu rovnost.

Formulujte a dokažte Čínskou větu o zbytcích (pro celá čísla).

Formulujte a dokažte Eulerovu větu, včetně pomocného lemmatu.

Formulujte a dokažte vzorec na výpočet Eulerovy funkce.

Formulujte a dokažte větu o počtu kořenů daného polynomu, včetně pomocného tvrzení.

Odvoďte Tartagliův vzorec na výpočet kořenů polynomu stupně 3.

Odvoďte Ferrariho vzorec na výpočet kořenů polynomu stupně 4.

Formulujte a dokažte větu o interpolaci.

Formulujte Eukleidův algoritmus v oboru polynomů nad tělesem, dokažte jeho správnost a odvoďte Bézoutovu rovnost.

18. těžký důkaz (6 bodů)

Dokažte, že existuje transcendentní číslo.

Dokažte, že v oboru polynomů jedné proměnné nad tělesem existují jednoznačně určené rozklady na ireducibilní prvky.

Dokažte, že v Gaussovských oborech existují NSD všech dvojic prvků (včetně pomocných tvrzení).

Dokažte, že z existence NSD a neexistence nekonečných posloupností vlastních dělitelů plyne Gaussovskost.

Dokažte, že Eukleidovské obory jsou Gaussovské (včetně pomocných tvrzení, Eukleidův algoritmus považujte za známý).

Dokažte, že Gaussova celá čísla tvoří Eukleidovský obor.

Dokažte, že v grupách platí $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ a $(a^{-1})^{-1} = a$.

Dokažte Lagrangeovu větu, včetně pomocných lemmat.

Dokažte Burnsideovu větu. Lemma o vztahu mezi velikostmi G, G_x a $[x]$ považujte za známé.

Dokažte lemma o vztahu mezi velikostmi G, G_x a $[x]$. Lagrangeovu větu pouze zformulujte.

Dokažte, že jádro a obraz homomorfismu jsou podgrupy a jak se z jádra pozná prostý homomorfismus.

Dokažte klasifikaci cyklických grup.

Dokažte, že podgrupy cyklických grup jsou cyklické.

Dokažte větu o počtu generátorů cyklických grup.

Dokažte, že $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Dokažte větu o cykličnosti multiplikativních grup těles.