Teorie

Definujte relaci uspořádání. Co je to lineární uspořádání? Co je to svaz a úplný svaz?

Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina a $A \subseteq X$. Definujte horní mez a supremum množiny A.

Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina a $A \subseteq X$. Definujte dolní mez a infimum množiny A.

Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina. Definujte maximální a největší prvek.

Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina. Definujte minimální a nejmenší prvek.

Definujte relaci ekvivalence. Co je to blok? Co značíme symbolem $[x]$?

Definujte algebraické a transcendentní číslo. Kterých je víc? Uveďte aspoň tři příklady transcendentních čísel.

Napište Základní větu aritmetiky.

Napište Bézoutovu rovnost v oboru celých čísel.

Definujte, co znamená zápis $a \equiv b \pmod{n}$, a uveďte základní vlastnosti.

Napište Čínskou větu o zbytcích.

Definujte Eulerovu funkci a napište Eulerovu větu.

Definujte Eulerovu funkci a uveďte vzorec pro její výpočet.

Definujte komutativní okruh s jednotkou.

Definujte obor integrity.

Definujte těleso.

Definujte podobor daného oboru.

Popište konstrukci podílového tělesa daného oboru integrity.

Definujte v daném oboru integrity následující značení: $a|b$, $a||b$, a je invertibilní.

Definujte ireducibilní prvek.

Co přesně rozumíme tím, že daný prvek a má v oboru $\mathbf{R}$ jednoznačný rozklad na ireducibilní prvky? Uveďte formální definici.

Definujte největší společný dělitel a nejmenší společný násobek v oboru $\mathbf{R}$.

Definujte gaussovský obor. Vysvětlete, co přesně rozumíme jednoznačností rozkladu.

Napište větu o tom, jak v gaussovských oborech vypadají dělitelé prvku s daným ireducibilním rozkladem.

Napište větu o charakterizaci gaussovských oborů pomocí existence NSD.

Definujte eukleidovskou normu a eukleidovský obor.

Napište Bézoutovu rovnost v Eukleidovském oboru $\mathbf{R}$.

Napište Eukleidův algoritmus v Eukleidovském oboru $\mathbf{R}$.

Definujte normu ν na oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{s}]$ a napište její základní vlastnosti.

Uveďte algoritmus dělení se zbytkem v oboru Gaussovských celých čísel.

Uveďte, jaký je vztah následujících čtyř vlastností oborů integrity: gaussovskost, eukleidovskost, existence NSD, Bézoutova rovnost.

Definujte pojem polynomu (jedné proměnné) nad obecným oborem integrity. Co je to absolutní a vedoucí člen? Co znamená, že je polynom monický?

Definujte obor polynomů s proměnnými $x_1, \ldots, x_n$ nad oborem integrity $\mathbf{R}$.

Definujte pojem formální mocninné řady (jedné proměnné) nad obecným oborem integrity.

Definujte kořen daného polynomu a uveďte tuto definici do souvislosti s dělitelností.

Definujte kořen daného polynomu a uveďte větu o počtu kořenů daného polynomu.

Napište kritérium existence racionálního kořene pro celočíselné polynomy.

Napište Eisensteinovo kritérium.

Definujte primitivní polynom a napište Gaussovo lemma.

Napište, jak počítat NSD v oboru $\mathbf{R}[x]$ za pomocí NSD v oborech $\mathbf{R}$ a $\mathbf{Q}[x]$, kde $\mathbf{Q}$ je podílové těleso oboru $\mathbf{R}$.

Napište, jak spolu souvisí ireducibilita polynomů v $\mathbf{R}[x]$ a v $\mathbf{Q}[x]$, kde $\mathbf{Q}$ je podílové těleso oboru $\mathbf{R}$.

Platí pro obor $\mathbb{Z}[x]$ analogie Základní věty aritmetiky? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Platí pro obor $\mathbb{Q}[x]$ analogie Základní věty aritmetiky? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Platí pro obor $\mathbb{Q}[x, y]$ analogie Základní věty aritmetiky? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Platí pro obor $\mathbb{Z}[i]$ analogie Základní věty aritmetiky? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Platí pro obor $\mathbb{Z}[x]$ Bézoutova rovnost? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Platí pro obor $\mathbb{Q}[x]$ Bézoutova rovnost? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Platí pro obor $\mathbb{Q}[x, y]$ Bézoutova rovnost? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Platí pro obor $\mathbb{Z}[i]$ Bézoutova rovnost? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Funguje v oboru $\mathbb{Z}[x]$ Eukleidův algoritmus? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, vysvětlete proč.

Funguje v oboru $\mathbb{Q}[x]$ Eukleidův algoritmus? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, vysvětlete proč.

Funguje v oboru $\mathbb{Q}[x, y]$ Eukleidův algoritmus? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, vysvětlete proč.

Funguje v oboru $\mathbb{Z}[i]$ Eukleidův algoritmus? Pokud ano, formulujte. Pokud ne, vysvětlete proč.

Jsou obory $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ gaussovské? Jsou eukleidovské? Pokud ano, uveďte normu. Pokud ne, vysvětlete proč.

Jsou obory $\mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$ gaussovské? Jsou eukleidovské? Pokud ano, uveďte normu. Pokud ne, vysvětlete proč.

Jsou obory $\mathbb{Z}[x]$ a $\mathbb{Q}[x]$ gaussovské? Jsou eukleidovské? Pokud ano, uveďte normu. Pokud ne, vysvětlete proč.

Jsou všechna tělesa obory integrity? Jsou všechny obory integrity tělesa? Pokud ano, stručně zdůvodněte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Jsou všechny obory integrity gaussovské? Jsou všechna tělesa gaussovskými obory? Pokud ano, stručně zdůvodněte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Jsou všechny gaussovské obory eukleidovské? Jsou všechny eukleidovské obory gaussovské? Pokud ano, stručně zdůvodněte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Jsou všechna tělesa eukleidovské obory? Jsou všechny eukleidovské obory tělesa? Pokud ano, stručně zdůvodněte. Pokud ne, uveďte protipříklad.

Co jsou to Gaussova celá čísla? Tvoří gaussovský obor? Tvoří eukleidovský obor?

Existují ve všech gaussovských oborech NSD(a,b) pro každé a, b? Pokud ne, uveďte protipříklad.

Existují ve všech oborech integrity NSD(a,b) pro každé a, b? Pokud ne, uveďte protipříklad.

Existují v oborech $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ NSD všech dvojic prvků? Pokud ne, uveďte protipříklad.

Je obor $\mathbb{Q}[[x]]$ Gaussovský? Je Eukleidovský? Pokud ano, uveďte normu.

Platí ve všech gaussovských oborech Bézoutova rovnost? Pokud ne, uveďte protipříklad.

Uveďte definici abelovské grupy.

Uveďte definici grupy.

Definujte grupu $\mathbf{S}_n$ a napište nějakou množinu generátorů velikosti $\leq n^2$.

Definujte grupu $\mathbf{A}_n$ a napište nějakou množinu generátorů velikosti $\leq n^3$.

Definujte grupu $\mathbf{T}^*$ pro dané těleso $\mathbf{T}$. Za jakých podmínek je cyklická?

Definujte grupu $\mathbb{Z}_n^*$. Jaké má prvky?

Uveďte nějaký postup na výpočet inverzního prvku v grupě $\mathbb{Z}_n^*$.

Uveďte větu o tom, jak vypadají prvky podgrupy generované danou množinou.

Uveďte dvě ekvivalentní definice pojmu řád prvku.

Definujte cyklickou grupu a uveďte příklad. Kolik má daná cyklická grupa generujících prvků?

Kolik má cyklická grupa velikosti n prvků řádu k?

Nechť $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Za jakých podmínek $\langle k \rangle = \mathbb{Z}_n$?

Uveďte všechny podgrupy grupy $\mathbb{Z}_n$.

Uveďte všechny podgrupy grupy $\mathbb{Z}$.

Uveďte větu o cykličnosti podgrup multiplikativních grup těles.

Definujte diskrétní logaritmus o základu a v cyklické grupě $\mathbf{G} = (G, *, ', e)$.

Napište, co rozumíme rozkladem grupy $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ podle podgrupy $\mathbf{H}$. Co rozumíme rozkladovou třídou a transverzálou?

Napište, co rozumíme rozkladem grupy $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ podle podgrupy $\mathbf{H}$ a uveďte základní vlastnosti.

Napište Lagrangeovu větu. Co přesně značí $[\mathbf{G} : \mathbf{H}]$?

Jaký je vztah řádu grupy a řádů jejích prvků?

Jaký je vztah řádu grupy a řádů jejích podgrup?

Nechť grupa $\mathbf{G}$ působí na množinu X. Definujte relaci tranzitivity a pojem orbity.

Nechť grupa $\mathbf{G}$ působí na množinu X a buď $x \in X$ a $g \in G$. Definujte X_g, G_x a $[x]$. Uveďte vztah mezi velikostmi G, G_x a $[x]$

Napište Burnsideovu větu.

Příklady

Nakreslete nejmenší uspořádanou množinu, která není svazem.

Nakreslete svaz podmnožin tříprvkové množiny.

Nakreslete svaz dělitelů čísla 42.

Nakreslete svaz dělitelů čísla 81.

Nakreslete svaz dělitelů čísla 100.

Nakreslete svaz dělitelů čísla 48.

Nakreslete svaz dělitelů čísla 70.

Tvoří konečné podmnožiny množiny $\mathbb{N}$ svaz vzhledem k uspořádání $\subseteq$? Stručně zdůvodněte.

Tvoří konečné podmnožiny množiny $\mathbb{N}$ úplný svaz vzhledem k uspořádání $\subseteq$? Stručně zdůvodněte.

Existuje lineární uspořádání na čtyřech prvcích? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

Existuje uspořádání na dvou prvcích, které není lineární? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

Existuje tříprvkový svaz? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

Existuje lineárně uspořádaná množina, která není úplným svazem? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

Je každá lineárně uspořádaná množina svaz? Stručně zdůvodněte.

Je každá lineárně uspořádaná množina úplný svaz? Stručně zdůvodněte.

Existuje svaz, jehož každá podmnožina má infimum, ale nějaká podmnožina nemá supremum? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

Nakreslete nejmenší uspořádanou množinu, která má maximální i minimální prvek, ale nemá největší ani nejmenší prvek.

Nakreslete nejmenší uspořádanou množinu, ve které má každá podmnožina supremum, ale nějaká podmnožina nemá infimum.

Nakreslete nejmenší uspořádanou množinu, která má aspoň tři maximální prvky a aspoň jeden nejmenší.

Nakreslete nejmenší uspořádanou množinu, která má aspoň tři maximální prvky a žádný nejmenší.

Nakreslete nejmenší uspořádanou množinu, která má aspoň tři maximální prvky a žádný největší.

Existuje uspořádaná množina, která má tři maximální prvky a jeden největší? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

Existuje uspořádaná množina, která má tři maximální prvky a žádný nejmenší? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

Existuje neprázdná uspořádaná množina, která nemá žádný minimální ani maximální prvek? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

Existuje uspořádaná množina taková, že každá její podmnožina má dolní i horní mez, ale přitom není svazově uspořádaná? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

Existuje uspořádaná množina taková, že každá její podmnožina má dolní i horní mez, ale přitom není svazově uspořádaná? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

Existuje uspořádaná množina, která má největší prvek, aspoň jeden minimální prvek a přitom není svaz? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

Existuje svaz bez nejmenšího prvku? Pokud ano, uveďte příklad, pokud ne, stručně zdůvodněte.

Je polynom 5 ireducibilní a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?

Je polynom 6 ireducibilní a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?

Je polynom $2x$ ireducibilní a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?

Je polynom $2x + 4$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Q}[x]$?

Je polynom $2x^2 + x - 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[x]$?
Je polynom $2x^2 + x - 2$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[x]$?
Je polynom $6x^2 + x - 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[x]$?
Je polynom $4x^2 - 4x + 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[x]$?
Je polynom $x^4 + 2x^2 + 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Je polynom $x^4 + 2x^2 + 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$?
Je polynom $x^4 + 5x^2 + 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}_7[x]$?
Je polynom $x^3 + x^2 + 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}_2[x]$?
Je polynom $x^2 + 1$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}_{13}[x]$?
Je polynom $2x$ invertibilní a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Je polynom 6 invertibilní a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Platí $6x^2 - 2x + 4 || -9x^2 + 3x - 6$ a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Platí $6x^2 - 2x + 4 || -9x^2 + 3x - 5$ a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Platí $2x^2 + 1 || x^2 + 2$ a) v oboru $\mathbb{Q}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$?
Platí $2x^2 + 1 || x^2 + 2$ a) v oboru $\mathbb{Q}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Z}_5[x]$?
Platí $3x^2 + 2x || 3x + 2$ a) v oboru $\mathbb{Z}[x]$, b) v oboru $\mathbb{Q}[x]$?
Platí $x^2 + 2x || 2x + 1$ a) v oboru $\mathbb{Z}_3[x]$, b) v oboru $\mathbb{Z}_5[x]$?
Najděte všechny racionální kořeny polynomu $x^3 - x^2 - 3x + 2$.
Najděte všechny racionální kořeny polynomu $2x^3 - 3x + 1$.
Najděte všechny racionální kořeny polynomu $2x^3 - x^2 + 2x - 1$.
Najděte všechny racionální kořeny polynomu $2x^4 - 4x$.
Najděte všechny racionální kořeny polynomu $2x^3 - x^2 + 4x - 2$.

Je prvek $5 + i$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek $3 + 5i$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek $7 - 2i$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek $4 + 5i$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek i ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek $i\sqrt{2}$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$?
Je prvek $5 + \sqrt{2}$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?
Je prvek $3 + 2\sqrt{2}$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?
Je prvek $1 + 3\sqrt{2}$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?
Je prvek $1 + i\sqrt{2}$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$?
Je prvek $2 + i\sqrt{3}$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$?
Je prvek $2 + \sqrt{3}$ ireducibilní v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$?
Je prvek $5 + i$ invertibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek $3 - 2i$ invertibilní v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Je prvek $1 + \sqrt{2}$ invertibilní v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?
Je prvek $1 + i\sqrt{2}$ invertibilní v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$?
Je prvek $2 + \sqrt{3}$ invertibilní v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$?
Platí $2 + i || 2 - i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Platí $2 + i || -1 + 2i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Platí $1 + i || 1 - i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Platí $7 + 3i || -5 - 4i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$?

Platí $8+3i||3-8i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$?
Platí $1+i\sqrt{2}||1-i\sqrt{2}$ v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$?
Platí $1+i\sqrt{2}||-1-i\sqrt{2}$ v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$?
Platí $i\sqrt{2}||2$ v oboru $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$?
Spočtěte podíl a zbytek $4+5i:1+i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte podíl a zbytek $5-2i:2+i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte podíl a zbytek $2+5i:2-i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte podíl a zbytek $3+7i:4$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte podíl a zbytek $15:3+i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte podíl a zbytek $-11+4i:3$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.
Spočtěte podíl a zbytek $-8+4i:2+2i$ v oboru $\mathbb{Z}[i]$.

Rozhodněte, zda iracionální čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{C}^*$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda celá čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{C}$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda celá čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{C}^*$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda racionální čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{R}$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda kladná čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{R}$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda kladná čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{R}^*$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda sudá celá čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Q}$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda sudá celá čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Q}^*$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda přirozená čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Q}$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda algebraická čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{C}$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda algebraická čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{C}^*$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda transcendentní čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{C}$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda transcendentní čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{C}^*$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda diagonální matice tvoří podgrupu grupy $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda horní trojúhelníkové matice tvoří podgrupu grupy $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda dolní trojúhelníkové matice tvoří podgrupu grupy $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda permutace splňující $\pi^2 = id$ tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_3$.
Rozhodněte, zda liché permutace tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_n$.
Rozhodněte, zda množina $\{1,7\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}_9^*$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda množina $\{1,3\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}_{10}^*$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda množina $\{1,2,4,5,10\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}_{11}^*$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda množina $\{1,3,9\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}_{13}^*$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda množina $\{1,4,7\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}_9^*$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda množina $\{1,5\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}_{12}^*$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda lichá čísla tvoří podgrupu grupy $\mathbb{Z}$. Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda otočení tvoří podgrupu grupy $\mathbf{D}_8$ (= grupa všech symetrií čtverce). Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda osové symetrie tvoří podgrupu grupy $\mathbf{D}_8$ (= grupa všech symetrií čtverce). Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda otočení tvoří podgrupu grupy $\mathbf{D}_{10}$ (= grupa všech symetrií pětiúhelníka). Stručně zdůvodněte.
Rozhodněte, zda osové symetrie tvoří podgrupu grupy $\mathbf{D}_{10}$ (= grupa všech symetrií pětiúhelníka). Stručně zdůvodněte.

Existuje neabelovská grupa s abelovskou vlastní podgrupou? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{S}_3$ abelovská? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{A}_4$ (=sudé permutace) abelovská? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{A}_3$ (=sudé permutace) abelovská? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{D}_8$ (symetrie čtverce) abelovská? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Z}^*$ abelovská? Stručně zdůvodněte.

Je $(\mathbb{Z}, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa? Stručně zdůvodněte.

Je $(\mathbb{Q}, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa? Stručně zdůvodněte.

Je $(\{0, 1, -1\}, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa? Stručně zdůvodněte.

Je $(\{1, -1\}, \cdot, ^{-1}, 1)$ grupa? Stručně zdůvodněte.

Tvoří matice s násobením grupu? Stručně zdůvodněte.

Tvoří všechny funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se skládáním grupu? Stručně zdůvodněte.

Existuje neabelovská 6-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje neabelovská 7-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje neabelovská 8-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje neabelovská 12-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje neabelovská nekonečná grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje cyklická nekonečná grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje cyklická osmiprvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje necyklická osmiprvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje necyklická 11-prvková grupa? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 100-prvková grupa obsahující prvek řádu 12? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 99-prvková grupa obsahující prvek řádu 8? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 99-prvková grupa obsahující prvek řádu 9? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 74-prvková grupa obsahující prvek řádu 10? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 64-prvková grupa, která má 16-prvkovou podgrupu? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 70-prvková grupa, která má 15-prvkovou podgrupu? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Existuje 60-prvková grupa, která má 15-prvkovou podgrupu? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, zdůvodněte.

Buď $\mathbf{G} = \mathbf{S}_4$ a $\mathbf{H} = \langle(1\ 2\ 3)\rangle$. Spočtěte prvky rozkladové třídy $(1\ 4)\mathbf{H}$.

Buď $\mathbf{G} = \mathbf{S}_4$ a $\mathbf{H} = \langle(1\ 2\ 3)\rangle$. Spočtěte prvky rozkladové třídy $(1\ 3\ 4)\mathbf{H}$.

Buď $\mathbf{G} = \mathbf{S}_4$ a $\mathbf{H} = \{\pi \in S_4 : \pi(4) = 4\}$. Spočtěte prvky rozkladové třídy $(1\ 4)\mathbf{H}$.

Buď $\mathbf{G} = \mathbf{D}_8$ a $\mathbf{H}$ podgrupa sestávající z otočení. Spočtěte prvky rozkladové třídy $o\mathbf{H}$, kde o je vybraná osa.

Buď $\mathbf{G} = \mathbf{D}_8$ a $\mathbf{H}$ podgrupa generovaná vybranou osovou sysmetrií. Spočtěte prvky rozkladové třídy $s\mathbf{H}$, kde s je středová symetrie.

Buď $\mathbf{G} = \mathbb{C}$ a $\mathbf{H} = \mathbb{R}$. Spočtěte prvky rozkladové třídy $i + \mathbf{H}$.

Buď $\mathbf{G} = \mathbb{C}^*$ a $\mathbf{H} = \{z : |z| = 1\}$. Spočtěte prvky rozkladové třídy $2i\mathbf{H}$.

Buď $\mathbf{G} = \mathbb{Z}_{14}^*$ a $\mathbf{H} = \{1, 9, 11\}$. Spočtěte prvky rozkladové třídy $3\mathbf{H}$.

Určete řád prvku 5 v grupě $\mathbb{Z}_{62}^*$.

Určete řád prvku 2 v grupě $\mathbb{Z}_{63}^*$.

Určete řád prvku 3 v grupě $\mathbb{Z}_{80}^*$.

Určete řád prvku 12 v grupě $\mathbb{Z}_{61}$.
Určete řád prvku 44 v grupě $\mathbb{Z}_{46}$.
Určete řád prvku 27 v grupě $\mathbb{Z}_{30}$.
Určete řád prvku $e^{6\pi i/7}$ v grupě $\mathbb{C}^*$.
Určete řád prvku $e^{3\pi i/8}$ v grupě $\mathbb{C}^*$.
Generuje prvek 8 grupu $\mathbb{Z}_{50}$? Generuje prvek 8 grupu $\mathbb{Z}_{51}$? Stručně zdůvodněte.
Generuje prvek 6 grupu $\mathbb{Z}_{70}$? Generuje prvek 6 grupu $\mathbb{Z}_{72}$? Stručně zdůvodněte.
Generuje prvek 2 grupu $\mathbb{Z}_9^*$? Stručně zdůvodněte.
Generuje prvek 4 grupu $\mathbb{Z}_{15}^*$? Stručně zdůvodněte.
Generuje prvek 7 grupu $\mathbb{Z}_{50}^*$? Stručně zdůvodněte.
Kolik podgrup má grupa $\mathbb{Z}_8$?
Kolik podgrup má grupa $\mathbb{Z}_{10}$?
Kolik podgrup má grupa $\mathbb{Z}_{12}$?
Kolik podgrup má grupa $\mathbb{Z}_6^*$?
Kolik podgrup má grupa $\mathbf{S}_3$?
Kolik prvků řádu 4 má grupa $\mathbf{S}_4$?
Kolik prvků řádu 5 má grupa $\mathbf{S}_4$?
Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbf{S}_5$?
Kolik prvků řádu 4 má grupa $\mathbb{Z}_{12}$?
Kolik prvků řádu 5 má grupa $\mathbb{Z}_{25}$?
Kolik prvků řádu 9 má grupa $\mathbb{Z}_{18}$?
Kolik prvků řádu 13 má grupa $\mathbb{Q}^*$?
Kolik prvků řádu 2 má grupa $\mathbb{Q}^*$?
Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbb{C}^*$?
Kolik prvků řádu 4 má grupa $\mathbb{C}^*$?
Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbb{Z}_9^*$?
Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbb{Z}_{12}^*$?
Kolik prvků řádu 2 má grupa $\mathbb{Z}_{15}^*$?
Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbb{Z}_{14}^*$?
Kolik prvků řádu nekonečno má grupa $\mathbb{Z}^*$?
Kolik prvků řádu 4 má grupa $\mathbf{D}_8$ (= grupa všech symetrií čtverce)?
Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbf{D}_8$ (= grupa všech symetrií čtverce)?
Kolik prvků řádu 2 má grupa $\mathbf{D}_8$ (= grupa všech symetrií čtverce)?
Kolik prvků řádu 5 má grupa $\mathbf{D}_{10}$ (= grupa všech symetrií pětiúhelníka)?
Kolik prvků řádu 4 má grupa sudých permutací $\mathbf{A}_4$?
Kolik prvků řádu 3 má grupa sudých permutací $\mathbf{A}_4$?
Kolik prvků řádu 2 má grupa $\mathbf{S}_4$?
Kolik prvků řádu 3 má grupa $\mathbf{S}_4$?
Kolik prvků řádu 4 má grupa $\mathbf{S}_4$?
Kolik prvků řádu 6 má grupa $\mathbf{S}_5$?
Kolik prvků řádu 5 má grupa $\mathbf{S}_5$?
Kolik prvků řádu 4 obsahuje grupa a) $\mathbb{C}$ b) $\mathbb{C}^*$?
Rozhodněte zda grupa a) $\mathbb{C}$, b) $\mathbb{C}^*$ obsahuje prvek řádu 5. Pokud ano, uveďte příklad.
Rozhodněte, zda grupa $\mathbf{S}_6$ obsahuje prvek řádu a) 5, b) 8. Pokud ano, uveďte příklad.

Rozhodněte, zda grupa $\mathbf{S}_5$ obsahuje prvek řádu a) 5, b) 6. Pokud ano, uveďte příklad.

Rozhodněte, zda grupa $\mathbf{S}_5$ obsahuje prvek řádu a) 4, b) 7. Pokud ano, uveďte příklad.

Rozhodněte, zda grupa $\mathbf{A}_4$ (= sudé permutace) obsahuje prvek řádu a) 4, b) 5. Pokud ano, uveďte příklad.

Rozhodněte, zda grupa $\mathbf{A}_5$ (= sudé permutace) obsahuje prvek řádu a) 4, b) 5. Pokud ano, uveďte příklad.

Určete řád prvku (1 2 5)(3 6)(4 7) v grupě $\mathbf{S}_7$.

Určete řád prvku (3 1 2 5)(7 6)(4) v grupě $\mathbf{S}_7$.

Určete řád prvku (3 1 6 5)(7 4 2 8) v grupě $\mathbf{S}_8$.

Určete řád prvku (1 3 9 5)(2 4 8)(6 7) v grupě $\mathbf{S}_9$.

Určete řád prvku (1 3)(4 8 7 6 5) v grupě $\mathbf{S}_8$.

Je grupa $\mathbf{S}_3$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{S}_4$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{A}_4$ (= sudé permutace) cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbf{D}_8$ (= grupa všech symetrií čtverce) cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa všech otočení krychle cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa všech otočení čtverce cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa všech otočení pětiúhelníka cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Q}$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Q}^*$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Z}_8^*$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Z}_{10}^*$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Z}^*$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je grupa $\mathbb{Z}[i]^*$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Je podgrupa $-6\mathbb{Z}$ grupy $\mathbb{Z}$ cyklická? Stručně zdůvodněte.

Vypište prvky podgrupy generované prvky $9, 15$ v grupě $\mathbb{Z}_{45}$.

Vypište prvky podgrupy generované prvky $9, 15$ v grupě $\mathbb{Z}_{35}$.

Vypište prvky podgrupy generované prvkem 16 v grupě $\mathbb{Z}_{21}$.

Vypište prvky podgrupy generované prvkem 2 v grupě $\mathbb{Z}_{21}^*$.

Vypište prvky podgrupy generované prvky $2, 11$ v grupě $\mathbb{Z}_{21}^*$.

Vypište prvky podgrupy generované prvkem 7 v grupě $\mathbb{Z}_{25}^*$.

Vypište prvky podgrupy generované prvkem $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ v grupě $\mathbb{C}^*$.

Vypište prvky podgrupy generované permutacemi $(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)$ v grupě $\mathbf{S}_4$.

Vypište prvky podgrupy generované permutacemi $(1\ 2)(3\ 4), (1\ 2)$ v grupě $\mathbf{S}_4$.

Vypište prvky podgrupy generované permutací (1 2 3)(4 5) v grupě $\mathbf{S}_5$.

Vypište prvky podgrupy generované permutací (1 2 5 4) v grupě $\mathbf{S}_5$.

Napište, jak vypadají prvky podgrupy generované prvky $\frac{2}{3}, \frac{5}{4}$ v grupě $\mathbb{Q}^*$.

Napište, jak vypadají prvky podgrupy generované prvky $1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + \sqrt{3}$ v grupě $\mathbb{R}$.

Rozhodněte, zda permutace splňující $\pi^3 = id$ tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_4$.

Rozhodněte, zda permutace splňující $\pi^3 = id$ tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_3$.

Rozhodněte, zda permutace splňující $\pi^4 = id$ tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_4$.

Rozhodněte, zda $\{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), id\}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_4$.

Vypište orbity působení grupy $\mathbf{D}_{10}$ všech symetrií pravidelného pětiúhelníka na množině jeho vrcholů.

Vypište orbity působení grupy $\mathbf{D}_{10}$ všech symetrií pravidelného pětiúhelníka na množině jeho hran.

Vypište orbity působení grupy $\mathbf{S}_8$ na množině $\{1, \ldots, 8\}$.

Vypište orbity působení grupy $\mathbf{S}_6$ na množině $\{(i, j) : i, j = 1, \ldots, 6\}$.

Nechť grupa $\mathbf{D}_{10}$ všech symetrií pravidelného pětiúhelníka působí na množině jeho vrcholů. Kolik pevných bodů má daná osová symetrie?

Nechť grupa $\mathbf{D}_{10}$ všech symetrií pravidelného pětiúhelníka působí na množině jeho hran. Kolik pevných bodů má daná osová symetrie?

Nechť grupa $\mathbf{D}_{12}$ všech symetrií pravidelného šestiúhelníka působí na množině jeho hran. Kolik pevných bodů má středová symetrie?

Kolik prvků má stabilizátor bodu 5 v působení grupy $\mathbf{S}_{10}$ na množinu $\{1, \ldots, 10\}$?

Kolik prvků má stabilizátor bodu 2 v působení grupy $\mathbf{S}_6$ na množinu $\{1, \ldots, 6\}$?

Kolik prvků má stabilizátor daného vrcholu v působení grupy $\mathbf{D}_{12}$ všech symetrií pravidelného šestiúhelníka na množině jeho vrcholů?

Kolik prvků má stabilizátor dané hrany v působení grupy $\mathbf{D}_{12}$ všech symetrií pravidelného šestiúhelníka na množině jeho hran?

Kolik prvků má stabilizátor daného vrcholu v působení grupy $\mathbf{D}_{10}$ všech symetrií pravidelného pětiúhelníka na množině jeho vrcholů?

Kolik prvků má stabilizátor dané hrany v působení grupy $\mathbf{D}_{10}$ všech symetrií pravidelného pětiúhelníka na množině jeho hran?

Uvažujme působení grupy otočení čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 3×3 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde jsou všechna políčka bílá?

Uvažujme působení grupy otočení čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 3×3 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde je prostřední políčko černé a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy otočení čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 3×3 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde je jedno rohové políčko černé a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy otočení čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 4×4 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde je jedno políčko černé a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy otočení čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 4×4 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde jsou rohová políčka černá a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy $\mathbf{D}_8$ všech symetrií čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 3×3 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde jsou všechna políčka bílá?

Uvažujme působení grupy $\mathbf{D}_8$ všech symetrií čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 3×3 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde je prostřední políčko černé a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy $\mathbf{D}_8$ všech symetrií čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 3×3 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde je jedno rohové políčko černé a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy $\mathbf{D}_8$ všech symetrií čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 4×4 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde je jedno vnitřní políčko černé a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy $\mathbf{D}_8$ všech symetrií čtverce na množinu všech obarvení šachovnice 4×4 dvěma barvami. Kolik prvků má stabilizátor obarvení, kde jsou rohová políčka černá a ostatní bílá?

Uvažujme působení grupy $\mathbf{GL}_n(\mathbf{T})$ na vektorový prostor T^n, kde akce matice A na vektoru v je definovaná jako Av. Vypište orbity.

Nechť grupa $\mathbf{G}$ všech izometrií v rovině (tj. všechna otočení, translace a osové symetrie) působí na rovinu $X = \mathbb{R}^2$. Vypište orbity.

Nechť grupa $\mathbf{G}$ všech izometrií v rovině (tj. všechna otočení, translace a osové symetrie) působí na rovinu $X = \mathbb{R}^2$. Vypište prvky G_x pro daný bod x.

Nechť grupa $\mathbf{G}$ všech izometrií v rovině (tj. všechna otočení, translace a osové symetrie) působí na rovinu $X = \mathbb{R}^2$. Vypište prvky X_g pro dané otočení g.

Nechť grupa $\mathbf{G}$ všech izometrií v rovině (tj. všechna otočení, translace a osové symetrie) působí na rovinu $X = \mathbb{R}^2$. Vypište prvky X_g pro danou translaci g.

Nechť grupa $\mathbf{G}$ všech izometrií v rovině (tj. všechna otočení, translace a osové symetrie) působí na rovinu $X = \mathbb{R}^2$. Vypište prvky X_g pro danou osovou symetrii g.

Spočtěte $13^{13^{13}} + 15^{15^{15}}$ mod 17.

Spočtěte 123^{321} mod 8.

Spočtěte 5^{444} mod 132.

Spočtěte poslední dvě cifry čísla 13^{282}.

Spočtěte poslední dvě cifry čísla 11^{441}.

Spočtěte poslední dvě cifry čísla 11^{442}.

Spočtěte poslední tři cifry čísla 3^{402}.

Spočtěte poslední tři cifry čísla 3^{403}.

Spočtěte <u>předposlední</u> cifru čísla 27^{4321}.

Spočtěte <u>předposlední</u> cifru čísla 27^{3321}.

Spočtěte poslední cifru čísla 3^{2007}.

Spočtěte 10^{9^8} mod 6.

Spočtěte $10^{11^{12}}$ mod 6.

Spočtěte 9^{8^7} mod 7.

Spočtěte 9^{7^5} mod 7.

Spočtěte $39^{12345} \cdot 61^{54321}$ mod 20.

Spočtěte $8^{1111} + 12^{1111}$ mod 10.

Spočtěte $8^{333} + 12^{333}$ mod 10.

Spočtěte $10^{444} + 14^{666}$ mod 12.

Spočtěte $10^{333} + 14^{333}$ mod 12.

Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $2x \equiv 2 \pmod 3$, $x \equiv 1 \pmod 4$, $3x \equiv 1 \pmod 5$.

Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $x \equiv 1 \pmod 4$, $x \equiv 2 \pmod 5$, $2x \equiv 3 \pmod 7$.

Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $x \equiv 1 \pmod 2$, $x \equiv 4 \pmod 5$, $x \equiv 6 \pmod 7$.

Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $x \equiv 0 \pmod 4$, $x \equiv 2 \pmod 5$, $x \equiv 3 \pmod 7$.

Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $x \equiv 1 \pmod 5$, $x \equiv 0 \pmod 6$, $x \equiv 4 \pmod 7$.

Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $x \equiv 3 \pmod 4$, $3x \equiv 4 \pmod{11}$.

Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $2x \equiv 5 \pmod 7$, $2x \equiv 5 \pmod 9$.

Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $3x \equiv 5 \pmod 8$, $x \equiv 5 \pmod 9$.

Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $4x \equiv 6 \pmod 7$, $x \equiv 3 \pmod 9$.

Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$ splňující $3x \equiv 7 \pmod{10}$, $2x \equiv 8 \pmod{11}$.

Najděte $0 \leq x \leq 31$ takové, že $28x \equiv 5 \pmod{31}$.

Najděte $0 \leq x \leq 33$ takové, že $29x \equiv 5 \pmod{33}$.

Najděte $0 \leq x \leq 35$ takové, že $9x \equiv 5 \pmod{35}$.

Najděte $0 \leq x \leq 37$ takové, že $4x \equiv 5 \pmod{37}$.

Spočtěte Bézoutovy koeficienty pro NSD(25,33).

Spočtěte Bézoutovy koeficienty pro NSD(21,30).

Spočtěte Bézoutovy koeficienty pro NSD(20,32).

Spočtěte Bézoutovy koeficienty pro NSD(19,27).

Spočtěte 11^{-1} v grupě $\mathbb{Z}_{24}^*$.

Spočtěte 13^{-1} v grupě $\mathbb{Z}_{19}^*$.
Spočtěte 5^{-1} v grupě $\mathbb{Z}_{22}^*$.
Spočtěte 7^{-1} v grupě $\mathbb{Z}_{23}^*$.