Domácí úlohy 2.

odevzdat do 8.3. 10:40

1. (5 bodů) Dokončete důkaz věty charakterizující konečné Booleovy algebry. Zbývá dokázat, že $\sup\{a \text{ atom: } a \leq b\} = b$. Označme levou stranu c. Je celkem jasné, že $c \leq b$. Kdyby $c < b$, rozepište $b = b \wedge 1 = b \wedge (c \vee c')$ pomocí distributivity, dedukujte, že $b \wedge c' \neq 0$, tedy pod tímto prvkem existuje atom, a to doveďte ke sporu.

2. (6 bodů) Dokažte, že Booleova algebra $\mathbf{P}(X)$ je izomorfní direktní mocnině $\mathbf{2}^{|X|}$. Zde $\mathbf{P}(X)$ značí algebru všech podmnožin množiny X a $\mathbf{2}$ dvouprvkovou Booleovu algebru. Pokud se necítíte silní v práci s nekonečnými množinami, důkaz formulujte pro $X = \{1, \ldots, n\}$.

3. (8 bodů) Podmožina A svazu $\mathbf{L}$ se nazývá ideál, pokud je uzavřená na spojení a pro každé $a < b \in A$ platí $a \in A$. Dokažte, že ideály svazu $\mathbf{L}$ tvoří úplný svaz vzhledem k inkluzi. Je to podsvaz svazu $\mathbf{P}(L)$? Najděte prostý homomorfismus z $\mathbf{L}$ do tohoto svazu.

4. (6 bodů) Dokažte, že svaz $\mathbf{L}$ je distributivní právě tehdy, když každý interval $[a, b]$ v $\mathbf{L}$ má vlastnost, že každý prvek má nejvýše jeden komplement. Intervalem $[a, b]$ rozumíme podsvaz $\{x \in L : a \leq x \leq b\}$. (Svaz $\mathbf{L}$ nemusí být omezený, ale interval vždy omezený je, proto má smysl mluvit o komplementech. Jedna implikace víceméně plyne z lemmatu, které bylo na přednášce, to nemusíte znovu dokazovat.)