1. Skupině třinácti pirátů se podařilo uloupit bednu zlatých mincí. Zkusili je rozdělit rovným dílem na třináct hromádek, ale deset mincí jim zbylo. O zbylé mince se strhla rvačka, při níž jednoho piráta propíchli. Přestali tedy bojovat a zkusili mezi sebe znovu rozdělit mince rovným dílem. Tentokrát zbyly tři mince, o které opět začali bojovat. V boji zahynul další pirát a tak si ostatní opět zkusili mince spravedlivě rozdělit, tentokrát úspěšně. Kolik bylo nejméně mincí, které piráti ukradli?

   Rešení. Úlohu převedeme na soustavu kongruencí, kde x je počet mincí, které piráti ukradli.

$$\begin{aligned} x &\equiv 10 \, mod \, 13 \\ x &\equiv 3 \, mod \, 12 \\ x &\equiv 0 \, mod \, 11 \end{aligned}$$

   Z poslední rovnice vidíme, že platí

$$x = 11k, \; k \in \mathbb{Z}$$

   To můžeme dosadit do druhé kongruence a dostaneme následující:

$$\begin{aligned} 11k &\equiv 3 \, mod \, 12 \\ -k &\equiv 3 \, mod \, 12 \\ k &\equiv 9 \, mod \, 12 \end{aligned}$$

   Tedy platí:

$$x = 11k = 11 \cdot (12l + 9) = 132l + 99$$

   pro nějaké $l \in \mathbb{Z}$. Konečně dosadíme do první kongruence:

$$\begin{aligned} 132l + 99 &\equiv 10 \, mod \, 13 \\ 2l + 8 &\equiv 10 \, mod \, 13 \\ 2l &\equiv 2 \, mod \, 13 \\ l &\equiv 1 \, mod \, 13 \end{aligned}$$

   Tedy $l = 13m + 1$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z}$ a po dosazení dostaneme řešení:

$$x = 132 \cdot (13m + 1) + 99 = 1716m + 132 + 99 = 1716m + 231$$

   Tedy nejmenší možný počet mincí je 231 (pro $m = 0$).

2. **Najděte všechna $x \in \mathbb{Z}$, pro která platí**

$$\begin{aligned} 3^x &\equiv 1 \pmod{11} \\ 3x &\equiv 1 \pmod{11} \end{aligned}$$

Rešení. NSD$(3, 11) = 1$, tedy podle Eulerovy věty platí $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Eulerova věta ale nedává nejmenší možnou periodu. V úvahu přicházejí dělitelé 10:

$$\begin{aligned} 3^1 &= 3 \not\equiv 1 \pmod{11} \\ 3^2 &= 9 \not\equiv 1 \pmod{11} \\ 3^5 &= 243 \equiv 1 \pmod{11} \end{aligned}$$

Tedy $x = 5k$ pro $k \in \mathbb{Z}$, to dosadíme do druhé kongruence:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5k &\equiv 1 \pmod{11} \\ 15k &\equiv 12 \pmod{11} \\ 4k &\equiv 12 \pmod{11} \\ k &\equiv 3 \pmod{11} \end{aligned}$$

Tedy řešení soustavy je:

$$x = 5 \cdot (11l + 3) = 55l + 15, \; l \in \mathbb{Z}$$