(1) Jakou podgrupu generuje v $(\mathbb{Q}, +, -, 0)$ množina $\left\{6, \frac{4}{5}\right\}$?

Řešení. Podgrupu označíme A. Její generátory můžeme libovolně sčítat a odčítat, obecný prvek podgrupy lze tedy napsat jako

$$6k + \frac{4}{5}l, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Tento prvek můžeme napsat jako

$$6k + \frac{4}{5}l = \frac{30k + 4l}{5} = \frac{2}{5}(15k + 2l),$$

tedy každý prvek podgrupy A lze vyjádřit jako násobek $\frac{2}{5}$. Při volbě $k = 1$ a $l = -7$ dostaneme $\frac{2}{5} \in A$, tedy A obsahuje právě všechny celočíselné násobky $\frac{2}{5}$:

$$A = \left\{\frac{2}{5}k \; : \; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(2) Dokažte, že dvojice prvků $(1,3)$ a $(1,2,3,4)$ *negeneruje* celou grupu S_4.

Řešení. Oba prvky patří (při vhodném označení vrcholů) do grupy D_8 všech symetrií čtverce: $(1,3)$ je osová symetrie podle úhlopříčky a $(1,2,3,4)$ je rotace o 90 stupňů. Tedy podgrupa S_4 generovaná těmito dvěma prvky nemůže být větší než D_8, která má 8 prvků a tedy je menší než S_4.

(3) Najděte všechny podgrupy grupy A_4. Zdůvodněte, že A_4 neobsahuje žádné další podgrupy než ty, co jste nalezli.

Řešení. Grupa A_4 obsahuje 12 prvků - identitu, 3 dvojice disjunktních transpozic a 8 trojcyklů. Budeme využívat toho, že každá podgrupa musí obsahovat identitu, inverzní prvky ke všem svým prvkům a musí být uzavřena na skládání permutací, a navíc, podle Lagrangeovy věty, její velikost musí dělit $|A_4| = 12$.

- prvky typu $(a,b)(c,d)$ jsou řádu 2, tj. jsou samy k sobě inverzní
- prvky typu $\pi = (a,b,c)$ jsou řádu 3, tj. platí $\pi^2 = (a,b,c)^2 = (a,c,b) = \pi^{-1}$

Podgrupy podle počtu prvků:

- 1: $\{id\}$ - jiná neexistuje, neboť grupa musí vždy obsahovat jednotkový prvek
- 2: musí vždy obsahovat jednotkový prvek a jeden další, který je sám k sobě inverzní, tj. jde o podgrupy $\{id, (1,2)(3,4)\}$, $\{id, (1,3)(2,4)\}$, $\{id, (1,4)(2,3)\}$
- 3: $\{id, (1,2,3), (1,3,2)\}$, $\{id, (1,3,4), (1,4,3)\}$, $\{id, (1,2,4), (1,4,2)\}$, $\{id, (2,3,4), (2,4,3)\}$ - žádné další neexistují, k identitě musíme přidat buď prvek řádu 3 a pak musíme přidat i jeho inverz (a dostaneme výše uvedené), nebo dva prvky řádu 2. Jejich složením ale dostaneme třetí prvek řádu 2 a tedy se nejedná o podgrupu o třech prvcích.
- 4: existuje jediná, a to $\{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$. Jiná neexistuje, protože řád prvku musí dělit řád podgrupy, prvky řádu 2 jsou jen tři a tvoří výše uvedenou podgrupu.
- 6: Podgrupa velikosti 6 musí mít aspoň dva generátory (prvek řádu 6 v A_4 není). Permutace řádu dva tvoří dohromady jen 4-prvkovou podgrupu. Snadno ověříme, že dva trojcykly generují celou A_4, a totéž platí pro jeden trojcyklus a jednu permutaci řádu 2 (podle Lagrangeovy věty stačí naskládat aspoň 7 prvků).
- 12: celá A_4