Domácí úlohy 12.

odevzdat do 13.5. 9:00

1. Buď $f \in \mathbb{Q}[x]$ ireducibilní polynom stupně 2 a $\mathbf{S}$ jeho kořenové nadtěleso. Dokažte, že $\mathbf{Gal}(\mathbf{S}/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_2$.

2. Buď $f \in \mathbb{Q}[x]$ ireducibilní polynom stupně 3 s právě jedním reálným kořenem a a $\mathbf{S} = \mathbf{T}(a)$ jeho kořenové nadtěleso. Dokažte, že $|\mathbf{Gal}(\mathbf{S}/\mathbb{Q})| = 1$.

3.

a) Dokažte, že každý $\mathbb{Q}$-automorfismus φ tělesa $\mathbb{R}$ zachovává uspořádání (tj. že $x < y$ právě tehdy, když $\varphi(x) < \varphi(y)$). Návod: $x < y$ právě tehdy, když $y = x + c^2$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.

b) Za pomoci části a) dokažte, že $|\mathbf{Gal}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})| = 1$.

Poznámka: Srovnejte tento výsledek s faktem, že $\mathbf{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ je nekonečná grupa (důkaz tohoto faktu je složitější).