Domácí úlohy 4.

odevzdat do 18.3. 9:00

Buď $\mathbf{G}$ grupa. Uvědomte si, že množina všech automorfismů grupy $\mathbf{G}$ tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_G$ (na které tvrzení z přednášky se odvoláváte?). Tuto grupu budeme značit $\mathbf{Aut}(\mathbf{G})$.

1. Buď $\mathbf{G}$ grupa a $a \in G$. Definujeme zobrazení $\psi_a : G \to G$ předpisem $\psi_a(x) = axa^{-1}$. Dokažte, že

a) ψ_a je automorfismus grupy $\mathbf{G}$ (těmto automorfismům se říká *vnitřní*);
b) zobrazení $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{Aut}(\mathbf{G})$, které prvku a přiřazuje zobrazení ψ_a, je homomorfismus;
c) obraz $\mathbf{Im}(\varphi)$ je normální podgrupou grupy $\mathbf{Aut}(\mathbf{G})$.

2. Všimněte si, že jádro $\mathbf{Ker}(\varphi)$ homomorfismu z předchozí úlohy sestává ze všech prvků $a \in G$, pro které platí $ax = xa$ pro všechna $x \in G$. Této podgrupě se říká *centrum* grupy $\mathbf{G}$ a značí se $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$. Například pro abelovské grupy platí $\mathbf{Z}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$.

a) Vypište prvky centra $\mathbf{Z}(\mathbf{D}_8)$.
b) Dokažte, že $\mathbf{Z}(\mathbf{S}_n) = \{id\}$.

Poznámka: Důsledkem části b) je fakt, že homomorfismus $\varphi : \mathbf{S}_n \to \mathbf{Aut}(\mathbf{S}_n)$ je prostý, tedy vnitřní automorfismy ψ_a jsou po dvou různé. Pro $n \neq 6$ dokonce platí, že φ je izomorfismus, tedy $\mathbf{Aut}(\mathbf{S}_n)$ sestává právě ze všech (po dvou různých) vnitřních automorfismů. Pro $n = 3$ je to snadné — automorfismů je nejvýše 6, protože transpozice se musí zobrazit na transpozice. Pro obecné n je to složitější.