Cvičení 12.

1. Buď $\mathbf{S}$ rozkladové nadtěleso polynomu $f \in T[x]$ stupně n. Dokažte, že $[\mathbf{S} : \mathbf{T}]$ dělí $n!$.

2. Nechť $\mathbf{L}$ je těleso charakteristiky různé od 2 a označme $\sqrt{a}$ nějaký kořen polynomu $x^2 - a \in L[x]$. Platí-li, že $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{ab} \notin L$, dokažte, že $[\mathbf{L}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) : \mathbf{L}] = 4$.

3. Buď $\mathbf{T}$ těleso charakteristiky $\neq 2$, $n \in \mathbb{N}$ a $M = \{\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}\}$. Jestliže $a_i \in T$ pro všechna i a pro každou neprázdnou $F \subseteq \{1, \dots, n\}$ platí, že $\prod_{k \in F} \sqrt{a_k} \notin T$, dokažte $[\mathbf{T}(M) : \mathbf{T}] = 2^n$.

4. Jsou-li ξ_1, ξ_2 komplexní kořeny polynomu $x^n - 1$, dokažte, že jsou tělesa $\mathbb{Q}(\xi_1)$ a $\mathbb{Q}(\xi_2)$ izomorfní, právě když $\mathbb{Q}(\xi_1) = \mathbb{Q}(\xi_2)$.