Cvičení 10.

1. Dokažte, že konstruovatelná čísla tvoří podtěleso $\mathbf{K}$ tělesa $\mathbb{R}$ takové, že $\sqrt{a} \in K$ pro každé $a \in K$.

2. Dokažte, že každé číslo, jehož minimální polynom má stupeň 2, je konstruovatelné.

3. Uveďte číslo, jehož minimální polynom má stupeň 4, ale není konstruovatelné.

4. Jsou prvky $1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ a $\sqrt[4]{2}/(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ algebraické nad tělesem $\mathbb{Q}$?

5. Předpokládejme, že je číslo $a \in \mathbb{R}$ transcendentní nad $\mathbb{Q}$. Dokažte, že a) číslo $\sqrt{a}$, b) číslo $f(a)$, kde f je libovolný polynom z $\mathbb{Q}[x]$, je také transcendentní nad $\mathbb{Q}$.

6. Buď $\mathbf{T}$ těleso a a algebraický prvek nad $\mathbf{T}$ takový, že $[\mathbf{T}(a) : \mathbf{T}]$ je lichý. Dokažte, že $\mathbf{T}(a) = \mathbf{T}(a^2)$.