Cvičení 8.

1. Najděte primitivní prvky tělesa:
(a) $\mathbb{F}_8 = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$, (b) $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$, (c) $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{Z}_2[x]/(x^4 + x + 1)$.

2. Spočítejte dimenzi a najděte nějakou bázi racionálních vektorových prostorů:
(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, (b) $\mathbb{Q}(\frac{17-\sqrt{5}}{19})$, (c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, (d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

3. Najděte ireducibilní polynom $m \in \mathbb{Q}[x]$, aby (a) $m(\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}) = 0$, (b) $m(1 - \sqrt[3]{2}) = 0$.

4. Uveďte příklad nekonečného tělesa (případně tělesa libovolné nekonečné mohutnosti) kladné charakteristiky.

5. Buď I ideál oboru $T[x_, \dots, x_n]$ pro těleso T a $I \cap T = \{0\}$. Dokažte, že je T podokruh okruhu $R = T[x_, \dots, x_n]/I$ a že a $g \in I \iff g(x_1 + I, \dots, x_n + I) = 0$ v okruhu R.