

Cvičení 6.

1. Buď $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ přirozená projekce grup, $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ některý izomorfismus grup (či vektorových prostorů nad \mathbb{Q}) a položme $f = \psi\pi$. Dokažte, že pro každý interval $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ platí, že $f((a, b)) = \mathbb{R}$.
2. Je-li \mathbf{T} komutativní těleso a $m \in \mathbf{T}[x] \setminus \{0\}$, dokažte, že je okruh $\mathbf{T}[x]/(m)$ izomorfní okruhu $\{p \in \mathbf{T}[x] \mid \deg(p) < \deg(m)\}$ s operacemi definovanými modulo m .
3. Dokažte, že $\mathbf{R}[x]/(x - a) \simeq \mathbf{R}$ pro libovolný komutativní okruh \mathbf{R} a $a \in \mathbf{R}$.
4. Dokažte, že a) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 1) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, b) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 1) \simeq \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{2}\}$.
5. Dokažte, že a) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{Z}[i]$, b) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$, c) $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.
6. S jakými známými okruhy jsou izomorfní faktorové okruhy a) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 3)$, b) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 3)$, c) $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 3)$?