

Cvičení 4.

1. Necht' \mathbf{H} je Kleinova podgrupa grupy \mathbf{S}_4 , tj. podgrupa sestávající z identity a všech tří permutací typu $(i\ j)(k\ l)$. Rozhodněte, zda je \mathbf{H} normální podgrupou grupy \mathbf{S}_4 .
2. Rozhodněte, zda množina $\{\pi \in S_4 : \pi^3 = id\}$ tvoří normální podgrupu grupy \mathbf{S}_4 .
3. Spočtěte nejmenší normální podgrupu grupy \mathbf{S}_5 obsahující a) permutaci $(1\ 2\ 3)$, b) permutaci $(1\ 2\ 3\ 4)$.
4. Dokažte, že je-li $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$ a $[\mathbf{G} : \mathbf{H}] = 2$, pak $\mathbf{H} \trianglelefteq \mathbf{G}$. Dokžte, že obdobné tvrzení neplatí pro $[\mathbf{G} : \mathbf{H}] = 3$.
5. Najděte v dihedralní grupě \mathbf{D}_8 podgrupy \mathbf{A} a \mathbf{B} , aby $\mathbf{A} \trianglelefteq \mathbf{B} \trianglelefteq \mathbf{D}_8$ a $\mathbf{A} \not\trianglelefteq \mathbf{D}_8$.
6. Najděte všechny normální podgrupy dihedralní grupy \mathbf{D}_8 .