Domácí úlohy 4.

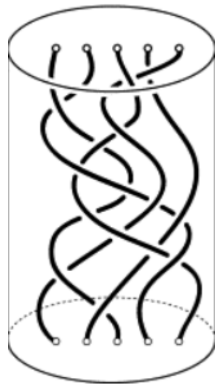
odevzdat do 6.6. ve formě PDF na stanovsk@karlin.mff.cuni.cz

Úkoly můžete řešit ve dvojici, v takovém případě odevzdávejte jedno řešení se dvěma podpisy. Oba uveďte přezdívku, pod kterou uvidíte výsledky na webu.

1. (6 bodů) Dokažte, že kvaternionová grupa Q_8 má prezentaci

$$Q_8 \simeq \langle a, b \mid aba = b, bab = a \rangle.$$

2. (4 body) Napište následující copánek jako složení elementárních copánků. Jak vypadá odpovídající permutace v kanonickém homomorfismu $B_5 \to S_5$? (Definice a značení viz komentář k videu o copánkové grupě.)



3. (6 bodů) Napište fundamentální grupu (a) objektu, který sestává z hran krychle, (b) objektu, který sestává ze stěn krychle, (c) krychle.

4. (4 bodů) Vezměte kruh a slepte středově symetrické body na hranici (tj. pokud vezmeme kruh o poloměru 1 se středem v $(0,0)$, slepíme právě body (a,b) a $(-a,-b)$, kde $a^2+b^2=1$). *(Nesnažte se lepit kus papíru, to je marné. Kreslete placaté obrázky jako pro torus a Kleinovu lahev.)* Výsledný prostor má fundamentální grupu izomorfní $\mathbb{Z}_2$. Konkrétně, zvolme bázový bod e na hranici kruhu. Napište mi, které cesty budou ekvivalentní triviální cestě a které ne, zdůvodněte proč součin dvou netriviálních cest lze zkontrahovat do bodu (stačí neformálně, rozkreslete animaci). *Návod:* průměr kruhu je cesta.

Taky si můžete rozmyslet, že právě popsaný prostor je totéž jako reálná projektivní rovina, čili $\pi_1(P^2\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_2$.