Copánková grupa *(braid group)*

`https://www.youtube.com/watch?v=u3Gt578803I`

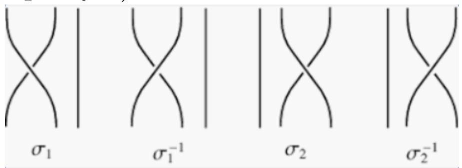
Tento text je komentářem k uvedenému videu, který jej uvádí do kontextu předmětu Proseminář z algebry.

Video dosti rozvláčně vysvětluje, co se v matematice rozumí copem (anglicky *braid*) a v jakém smyslu copy tvoří grupu. Ještě jednou svými slovy provedu neformální výklad.

Máme destičku s n body, z nichž směrem dolů visí n provázků. Ty propleteme (aniž bychom v kterémkoliv okamžiku některý pramen vedli vzhůru) a konce připevníme na totožnou spodní destičku, se stejnými n body. Dostali jsme n-cop. Dva copy považujeme za totožné, pokud jeden z druhého dostaneme spojitou manipulací, tj. bez trhání a slepování pramenů. Copy lze skládat tak, že dolní destičku jednoho ztotožníme s horní destičkou druhého a pak tu destičku necháme zmizet. Při této operaci tvoří množina všech n-copů grupu, tzv. *copánkovou grupu*, značí se B_n. Její jednotkou je cop, kde provázky visí volně, neproplétají se. Inverz dostaneme tak, že cop zrcadlově otočíme: slepením copu a jeho zrcadlového obrazu dostaneme triviální cop.

Formalizace všech uvedených pojmů je v zásadě přímočará, ale poněkud kostrbatá. Místo destiček máme dvě rovnoběžné roviny v $\mathbb{R}^3$ s přesně specifikovanými n body, místo provázků máme spojité křivky mezi těmito body, přičemž tyto křivky mají v každém bodě směrnici do stejného poloprostoru určeného počáteční rovinou ("pořád jdou dolů"). Copem pak rozumíme geometrický útvar sestávající z těch dvou rovin a těch n křivek. Dva copy jsou ekvivalentní, pokud existuje spojitá transformace prostoru $\mathbb{R}^3$, která z jednoho copu vytvoří druhý (pojem spojité transformace dál vyžaduje formalizaci, ale už toho nechám). Copánková grupa B_n se definuje na třídách této ekvivalence.

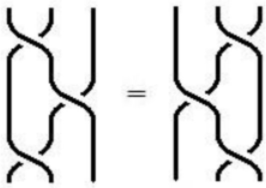
Každý cop lze poskládat z tzv. elementárních copů. V nich se jisté dva sousední prameny kříží a ostatní prameny visí volně. Označíme je σ_i, kde i je číslo levého pramene, přičemž tento pramen prochází z našeho pohledu *nad* tím pravým). Grupa B_n je generována elementárními copy $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, neboť každý cop je spojením elementárních copů σ_i nebo jejich inverzů (kde levý pramen prochází *pod* tím pravým).



Všimněte si, že vzdálené elementární copy komutují - křížení provázků mohou posunovat nahoru a dolů. Elementární copy, které sdílejí pramen, nekomutují, ale splňují relaci

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

(levý, tj. horní provázek lze libovolně posouvat nad ostatními).



Použitím výše odfláknuté formalizace se dá dokázat (Emil Artin roku 1947), že copánková grupa má následující prezentaci:

$$B_n = \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \mid a_i a_j = a_j a_i \text{ pokud } |i-j| > 1,\ a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \rangle.$$

A zde začíná tzv. algebraická teorie copánků: na geometrii a upracované analytické metody můžeme spokojeně zapomenout, od dob Artina jsou copánky algebraickým objektem, jehož chování je přesně popsáno v té prezentaci. Veškeré otázky ohledně přemotání jednoho copánku na druhý lze převést na výpočty ve výše uvedené prezentaci. Mezi velká vítězství algebry nad analýzou v 20. století patří například algoritmus, který umí efektivně rozhodnout, zda je copánek zadaný jako složení elementárních copů triviální (tj. i když holku chytnete za konec copu, ten se stejně rozváže).

Na závěr bych rád upozornil na zajímavý kontext: v přednášce o prezentacích grup jsem uvedl následující příklad:

$$S_n = \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \mid a_i^2 = 1,\ a_i a_j = a_j a_i \text{ pokud } |i-j| > 1,\ a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} \rangle.$$

Prezentace grup B_n a S_n jsou si tedy velmi podobné. Formálně, existuje homomorfismus $B_n \to S_n$ daný zobrazením $a_i \mapsto a_i$. Geometricky, copánku σ_i přiřadíme permutaci $(i\ i+1)$. Z toho je snadné nahlédnout, že danému copu se přiřadí permutace, která popisuje, kde který pramen skončí, tj. $\pi(i)$ je rovno pozici, na níž skončí i-tý provázek. Zobrazení není prosté: například σ_1 i σ_1^{-1} se zobrazí na permutaci $(1\ 2)$.

Podrobější povídaní najdete na wikipedii: `https://en.wikipedia.org/wiki/Braid_group`

A pokud vás děsí představa maticové reprezentace copánků, podívejte se na její taneční ztvárnění studenty UCSB: `https://www.youtube.com/watch?v=MASNukczu5A`