Domácí úlohy 4.

odevzdat do 7.5. 10:40 (na začátku prosemináře)

Úkoly můžete řešit ve dvojici, v takovém případě odevzdávejte jedno řešení se dvěma podpisy. Oba uveďte přezdívku, pod kterou uvidíte výsledky na webu.

1. (5 bodů) Uvažujte Hammingův $(4, 7)$-kód popsaný na prosemináři. Dostali jste zprávu

00100010011101001110110110111101100010100010011001100111

Předpokládejte, že v každé sedmici je nejvýše jedna chyba. Najděte původní zprávu.

2. (5 bodů) Uvažujte těleso $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1)$, prvek $a + b\alpha$ budeme zapisovat jako slovo ab délky 2. Uvažujte Reed-Salomonův $(2, 4)$-kód nad tímto tělesem, kde $u_1 = 00, u_2 = 01, u_3 = 10, u_4 = 11$. Dekódujte zprávu

01001010

(tj. jde o kódové slovo délky 4, původní slovo je délky 2).

3. (5 bodů) Označme F_{20} grupu, která má nosič $\mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_5$, na němž je definována binární operace $\circ$ vztahem $(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + b)$. Ukažte, že F_{20} je izomorfní podgrupě grupy S_5 generované permutacemi (12345) a (1243).

4. (5 bodů) Nechť χ je netriviální charakter modulo $n > 1$. Dokažte, že potom platí:

(i) $\sum_{a \in \mathbb{Z}_n^*} \chi(a) = 0, \qquad \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^*} \varepsilon(a) = \varphi(n),$

(ii) Je-li $n = p$ prvočíslo a $b \neq 1$, pak $\sum_{\eta \in Hom(\mathbb{Z}_p^*, \mathbb{C}^*)} \eta(b) = 0, \qquad \sum_{\eta \in Hom(\mathbb{Z}_p^*, \mathbb{C}^*)} \eta(1) = p - 1.$

Zde ε značí triviální charakter a φ Eulerovu funkci.