Domácí úlohy 1.

odevzdat do 12.3. 10:40

do schránky na KA nebo na stanovsk@karlin.mff.cuni.cz

Úkoly můžete řešit ve dvojici, v takovém případě odevzdávejte jedno řešení se dvěma podpisy. Oba uveďte přezdívku, pod kterou uvidíte výsledky na webu.

1. (5 bodů) Na závodech se sešli sportovci z pěti kontinentů, z každého kontinentu po jednom zástupci v každé z pěti disciplín. Nakreslete nějaké rozestavení sportovců do čtverce 5×5, kde v každém řádku a každém sloupci bude po jednom sportovci z každého kontinentu a každé disciplíny. Lze to udělat tak, aby na diagonále byli všichni sportovci ze stejného kontinentu?

2. (5 bodů) Buď $(X, *)$, $(X, \circ)$ a $(Y, *')$, $(Y, \circ')$ dvě dvojice navzájem ortogonálních latinských čtverců. Dokažte, že direktní součiny $(X, *) \times (Y, *')$ a $(X, \circ) \times (Y, \circ')$ jsou navzájem ortogonální latinské čtverce. *(Možná jsem to na prosemináři zapsal špatně, ale má to být takhle. Přesnou definici direktního součinu si můžete dohledat ve skriptech.)*

3. (5 bodů) Buď $(P, \cdot)$ pologrupa, kde existuje e takové, že pro všechna $a \in P$ je $a \cdot e = a$, a zároveň pro každé $a \in P$ existuje $a' \in P$ tak, že $a \cdot a' = e$. Ukažte, že $(P, \cdot, ', e)$ je grupa.

4. (5 bodů) Nechť $F = F(\{a, b\})$ je grupa slov nad abecedou $\{a, b\}$. Uvažujme její podgrupu G sestávající ze všech slov, které mají sudý počet písmen z množiny $\{a, a^{-1}\}$. Najděte podmnožinu M grupy G takovou, aby každé neprázdné slovo z G šlo vyjádřit právě jedním způsobem jako součin prvků z množiny M a prvků k nim inverzních. (Jinak řečeno: ukažte, že G je fakticky grupa slov nad abecedou M.)