Domácí úlohy 1.

odevzdat do 30.10. 15:40

V těchto cvičeních se definovatelností myslí definovatelnost v jazyce dané struktury (tj. to, co se někdy označuje jako 0-definovatelnost), nikoliv v jazyce obohaceném o konstanty odkazující k prvkům.

1. (5 bodů) Dokažte, že jsou následující množiny definovatelné ve struktuře $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ (můžete si vybrat, zda je nula přirozené číslo):

(a) jednoprvkové množiny
(b) množina všech prvočísel,
(b) $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. (2 body) Buď f libovolná funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dokažte, že je ve struktuře $(\mathbb{R}, f, <)$ definovatelná množina $\{a \in \mathbb{R} : f \text{ je spojitá v bodě } a\}$.

3. (2 body) Vypište všechny definovatelné podmnožiny ve sktruktuře $(\mathbb{Q}, <)$. Uvažujte pouze "jednodimenzionální"definovatelné množiny, tj. formulemi s jednou volnou proměnnou.

4. (2 body) Dokažte, že sudá čísla nejsou definovatelná ve struktuře $(\mathbb{Z}, \cdot)$. (Návod: uvažujte automorfismus definovaný pomocí rozkladu čísla na prvočísla.)

5. (4 body) Dokažte, že jsou následující struktury nejsou izomorfní:

(a) $(\mathbb{Z}, <)$ a $(\mathbb{Q}, <)$,
(b) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ a $(\mathbb{Z}, +)$.

K řešení úloh můžete použít následující větu:

Tvrzení. *Buď f izomorfismus struktur $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ a buď X podmnožina v $\mathcal{A}$ definovatelná formulí φ. Pak $f(X)$ je podmnožina v $\mathcal{B}$ definovatelná formulí φ.*

Důkaz tohoto tvrzení se provede indukcí podle délky dané formule. Je to užitečné, i když poněkud pracné, cvičení. Doporučuji si ho zkusit, ale odevzdávat ho nemusíte. (Návod: Uvžujte obecně definovatelné podmnožiny $X \subseteq A^n$, pro formule s n volnými proměnnými. Tvrzení nejprve dokažte pro atomické formule. Pak pro formule, které jsou tvaru $\varphi \circ \psi$ kde $\circ$ je logická spojka. A nakonec pro formule začínající kvantifikátorem.)

Důsledek. *Je-li X definovatelná podmnožina ve struktuře $\mathcal{A}$ a je-li f automorfismus této struktury, pak $f(X) = X$.*

Důsledek. *Buď f izomorfismus struktur $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ a φ sentence. Pak $\mathcal{A} \models \varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{B} \models \varphi$.*

Domácí úlohy BONUS.

odevzdat spolu s 2. sérií

Přečtěte si Logicomix. (Pokud se vám to nechce číst celé, tak si přečtěte aspoň těch pár stěžejních částí, kde se děje nějaká matematika.)

6. (1 bod) Kolik koláčků snědl Russell Fregemu? Při čí přednášce myslel Poincaré na párky? Kdo seděl vedle Russella na Gödelově přednášce?

7. (2 body) Proč nešel Russell studovat reálnou analýzu? Tato otázka si zasluhuje zamyšlení a odpověď aspoň jednou košatou větou.

Body budou přičteny k celkovému skóre z domácích úloh.