Domácí úlohy 6.

odevzdat do 27.5. 12:00

Nezapomeňte uvést přezdívku, jméno cvičicího a **čas cvičení**.

1. (5 bodů) Najděte všechny kořeny rovnice $x^3+3x^2+6x+6=0$ v oboru komplexních čísel. Uveďte posloupnost tělesových rozšíření, která prokazuje, že je tento polynom řešitelný v radikálech.

(Nepovinný úkol: zkuste si totéž pro rovnici $x^4+x^2+x+1=0$.)

2. (10 bodů) Jak vypadá grupa $\mathrm{Gal}(x^5+2/\mathbb{Q})$? Dokažte, že má 20 prvků a není abelovská [stačí na 7 bodů]. Dokažte, že je izomorfní s grupou $Aff(\mathbb{Z}_5)$ všech afinních transformací nad tělesem $\mathbb{Z}_5$. [zbylé 3 body].

Grupa $Aff(T)$ sestává ze zobrazení $x \mapsto ax+b$ nad tělesem T, kde $a \in T^*$ a $b \in T$, s operací skládání (čili tato grupa má $|T| \cdot (|T|-1)$ prvků). Sami si ověřte (nemusíte sepisovat), že $Aff(T)$ je opravdu podgrupou grupy všech permutací na množině T, a že zobrazení tvaru $x \mapsto x+b$ tvoří normální podgrupu N, která je abelovská a faktor podle N je také abelovský.

Návod: inspirujte se důkazem tvrzení, které popisuje grupy $\mathrm{Gal}(x^n-a)$. Výše uvedenou podgrupu N v $Aff(\mathbb{Z}_5)$ použijte k nalezení izomorfismu.