Jméno:

Tvrzení a definice pečlivě formulujte včetně všech předpokladů. Pište text stejně formálně, jako je psán ve skriptech (tj. formálněji než na tabuli). Odpovědi na otázky zdůvodněte. Pokud používáte nějaké netriviální tvrzení z přednášky, uveďte explicitně odkaz (často budete vyzváni, abyste všechna použitá tvrzení zformulovali). Časový limit je 120 minut.

1. (8 bodů) Kolika způsoby lze obarvit stěny pravidelného čtyřstěnu k různými barvami? Dvě obarvení považujeme za totožná, pokud se liší otočením čtyřstěnu.

2. (20 bodů) Uvažujte grupu D_{22}.

- Kolik má podgrup? Vypište je nějakým konkrétním, ale krátkým způsobem, a zdůvodněte, proč jiné nejsou.
- Které z těchto podgrup jsou normální? Vysvětlete!
- Je tato grupa řešitelná? Pokud ano, jaký je stupeň řešitelnosti?
- Kolik existuje homomorfismů $D_{22} \to S_3$?

3. (10 bodů)

- Popište konstrukci faktorokruhu (nemusíte dokazovat, že je konstrukce korektní).
- Dokažte, že faktorokruh R/I je oborem integrity právě tehdy, když je I prvoideál.
- Vysvětlete, proč je faktorokruh $T[x]/mT[x]$ (ve smyslu letního semestru) izomorfní s okruhem $T[x]/(m)$ (ve smyslu zimního semestru). Zde T je těleso a $m \in T[x]$.

4. (15 bodů)

- Uvažujte polynom $f = x^4 + 4$. Napište jeho rozkladové nadtěleso ve formě $\mathbb{Q}(a, b)$ pro vhodná $a, b \in \mathbb{C}$ a spočtěte jeho stupeň nad $\mathbb{Q}$. Napište věty, které k výpočtu používáte.
- Buď $T \leq S$ rozšíření těles konečného stupně n. Dokažte, že každý prvek S je algebraický nad T a že stupeň jeho minimálního polynomu je $\leq n$.

5. (12 bodů)

- Formulujte tvrzení, které umožňuje počítat Galoisovy grupy polynomu ("vnoření, tranzitivita, faktor"), včetně všech předpokladů.
- Jak vypadá grupa $Gal(x^4+4/\mathbb{Q})$? Napište co nejvíce vlastností: kolik má prvků, s kterou známou grupou je izomorfní, zda je řešitelná, zda je abelovská…