

Domácí úlohy 4.  
odevzdat do 11.12. 15:40

1. (4 body) Stavebnice obsahuje 12 stejných destiček ve tvaru rovnostranného trojúhelníka, na kterých je nakreslena jedna těžnice. Kolika způsoby z nich lze sestavit pravidelnou šesticípou hvězdu? Dvě sestavy považujeme za totožné, dostaneme-li jednu z druhé otočením a převrácením.
2. (4 body) Buď  $G$  grupa a  $H$  její normální podgrupa. Dokažte, že pokud jsou  $H$  i  $G/H$   $p$ -grupy, pak je  $G$  taky  $p$ -grupa. Důkaz musí fungovat i pro nekonečné grupy, tj. musíte využít definici přes řady prvků.
3. (4 body) Uveďte všechny Sylowské  $p$ -grupy v grupě  $S_7$ . S jakou známou grupou jsou izomorfní?
4. (4 body) Buď  $H \leq GL_3(\mathbb{Z}_p)$  podgrupa sestávající z horních trojúhelníkových matic, které mají na diagonále jedničky. Dokažte, že je to Sylowská  $p$ -podgrupa v  $GL_3(\mathbb{Z}_p)$ . Která ze známých osmiprvkových grup to je pro  $p = 2$  ?
5. (4 body) Buď  $G$  dvanáctiprvková grupa. Dokažte, že se rozkládá netriviálně na semi-direktní součin. (V minulosti jsme si rozebírali, jak vypadají všechny tyto součiny, což dokončuje klasifikaci dvanáctiprvkových grup.)