

Požadavky ke zkoušce z Algebraických křivek

Ke zkoušce není potřeba studovat víc, než co jsme dělali na přednášce a co se objevilo v domácích úkolech. Některé těžší důkazy (viz níže) se není třeba učit, nicméně by bylo dobré jim aspoň v hrubých obrysech rozumět.

Je bezpodmínečně nutné, abyste ovládali základní jazyk algebraické geometrie, počínaje operátory V, I , až po definice pojmů jako je násobnost křížení. Umět základní výpočty s polynomy a jejich ideály. Chápat význam vět, o kterých jsme mluvili. Dokázat jednoduché věci, kde si vystačíte s kombinací definic ("pozorování"). Pokud aspirujete na lepší známku, měli byste umět napsat i těžší důkazy.

Základy afinní algebraické geometrie. Galoisova korespondence body vs. polynomy, základní vlastnosti. Hilbertova věta o nulách slabá a silná verze, horní odhad počtu řešení soustavy pomocí dimenze $K[\bar{x}]/I$. (Důkaz věty o tom, že $K[\bar{x}]/M$ je konečné rozšíření, si přečtete celý, ale na důkaz lemmatu o tom, že konečnost $R \leq T$ a $S \leq T$ implikuje konečnost $R \leq S$, se ptát nebudu.) Ireducibilní rozklad algebraické množiny (existence, jednoznačnost, ireducibilita vs. prvoideály). Klasifikace variet v rovině.

Souřadnicové okruhy. Okruh polynomiálních funkcí, těleso racionálních funkcí, lokalizace v bodě, maximální ideál v lokalizaci (definice, základní vlastnosti). Věta o rozkladu $K[\bar{x}]/I$ pro konečné algebraické množiny (bez důkazu).

Lokální vlastnosti křivek. Násobnost bodu, tečny v bodě. Kritérium násobnosti bodu: jednoduchý \Leftrightarrow lokalizace je DVR, vyjádření násobnosti jako dimenze faktorideálu (důkaz pouze pro implikaci \Rightarrow první části). Násobnost křížení: definice, vlastnosti (důkazy jen ty, co byly na přednášce), výpočet.

Základy projektivní algebraické geometrie. Projektivní prostor, homogenní souřadnice. Formy, značení f^*, f_* . Nuly polynomů, homogenní ideály. Galoisova korespondence body vs. polynomy, základní vlastnosti. Projektivní Hilbertova věta o nulách. Ireducibilní rozklad projektivní algebraické množiny (buďte schopní zformulovat důkaz existence a jednoznačnosti v projektivním případě!). Geometrický vztah afinních a projektivních algebraických množin (důkaz vlastností 1-5).

Lokální vlastnosti a Bézoutova věta. Funkční těleso a lokalizace v projektivním případě, násobnost a křížicí číslo (definice a umět vysvětlit, proč jsou dobře definované). Bézoutova věta: formulace, aplikace: Pascalovo hexagrammum mysticum (včetně důkazu), konstrukce grupové operace na eliptické křivce (bez důkazu asociativity). (Důkaz Bézoutovy věty ne.)

Počtní úlohy. Základní příklady s operátory I, V . Testování ireducibility a rozklady. Počet řešení soustavy a dimenze. Póly funkce. Násobnost bodu, tečny. Křížicí čísla. *Vše v afinní i projektivní variantě!*

Struktura písemky. (120 min.):

- 2-3 otázky na znění vět, definic a související příklady
- 1-2 početní úlohy
- zpravidla 2 důkazy vět z přednášky