Domácí úlohy 2.

odevzdat do 24.11. 14:00

Cvičení se bude týkat izomorfismů a definovatelných podmnožin. Potřebná teorie je shrnuta níže, ale doporučuji nahlédnout do skript a dozvědět se i nějaká fakta okolo (str. 25-26: podstruktury a homomorfismy; str. 32: definovatelné podmnožiny).

Podmnožina $X \subseteq A$ se nazývá *definovatelná* ve struktuře $\mathcal{A}$ v jazyce L, pokud existuje formule φ v jazyce L s jednou volnou proměnnou taková, že

$$X = \{a \in A : \ \mathcal{A}_A \models \varphi(c_a)\}.$$

Například formule $(\exists y)(x = y \cdot y)$ v jazyce grup definuje následující podmnožiny:

- sudá čísla ve struktuře $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$,
- kladná reálná čísla ve struktuře $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$,
- všechna nenulová komplexní čísla ve struktuře $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$,
- permutace mající sudý počet cyklů každé sudé délky ve struktuře $(S_n, \circ, ^{-1}, id)$.

Naopak, jednoprvková množina je definovatelná v grupě $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ právě tehdy, když to je množina $\{0\}$.

1. (8 bodů) Dokažte, že jsou následující množiny definovatelné:

(a) prvočísla ve struktuře $(\mathbb{N}, +, \cdot)$,
(b) $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ ve struktuře $(\mathbb{N}, +, \cdot)$,
(c) libovolná jednoprvková podmnožina ve struktuře $(\mathbb{Z}, +, -, 0, <)$,
(d) $\{a \in \mathbb{R} : f$ je spojitá v bodě $a\}$ ve struktuře $(\mathbb{R}, f, <)$; zde f je libovolná unární funkce.

Jak dokázat, že nějaká podmnožina není definovatelná? Asi nechcete procházet jednotlivé formule a dokazovat, že ta to není a tahle taky ne. Užitečné kritérium používá pojem automorfismu.

Izomorfismus struktur $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ ve stejném jazyce L je bijekce $f : A \to B$ taková, že

- pro každý n-ární symbol $F \in L^f$ a všechna $a_1, \ldots, a_n \in A$ platí
$$f(F^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = F^{\mathcal{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_n)),$$
- pro každý n-ární symbol $R \in L^r$ a všechna $a_1, \ldots, a_n \in A$ platí
$$R^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$

Rozmyslete si, že je tato definice v souladu s definicí izomorfismu pro grupy, okruhy nebo grafy. *Automorfismem* se rozumí každý izomorfismus $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Tvrzení. *Buď f izomorfismus struktur $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ a buď X podmnožina v $\mathcal{A}$ definovatelná formulí φ. Pak $f(X)$ je podmnožina v $\mathcal{B}$ definovatelná formulí φ.*

Důkaz tohoto tvrzení se provede indukcí podle délky dané formule. Je to užitečné, i když poněkud pracné, cvičení. Doporučuji si ho zkusit, ale odevzdávat ho nemusíte. (Návod: Uvžujte obecně definovatelné podmnožiny $X \subseteq A^n$, pro formule s n volnými proměnnými. Tvrzení nejprve dokažte pro atomické formule. Pak pro formule, které jsou tvaru $\varphi \circ \psi$ kde $\circ$ je logická spojka. A nakonec pro formule začínající kvantifikátorem.)

Důsledek. *Je-li X definovatelná podmnožina ve struktuře $\mathcal{A}$ a je-li f automorfismus této struktury, pak $f(X) = X$.*

2. (6 bodů) Dokažte, že jsou následující množiny nejsou definovatelné:

(a) prvočísla ve struktuře $(\mathbb{N}, +, <)$,
(b) sudá čísla ve struktuře $(\mathbb{Z}, \cdot)$ (návod: uvažujte automorfismus definovaný pomocí rozkladu čísla na prvočísla),
(c) libovolná jednoprvková podmnožina kromě $\{0\}$, ve struktuře $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$.

A na závěr jedna aplikace výše uvedeného Tvrzení. Je-li φ sentence, tj. pokud její platnost nezávisí na žádném parametru, odpovídající definovatelná podmnožina je buď prázdná (pokud v $\mathcal{A}$ tato sentence neplatí), nebo rovna A (pokud tam platí). Dostáváme následující důsledek.

Důsledek. *Buď f izomorfismus struktur $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ a φ sentence. Pak $\mathcal{A} \models \varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{B} \models \varphi$.*

3. (6 bodů) Dokažte, že jsou následující struktury nejsou izomorfní:

(a) $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$,
(b) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$,
(c) $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Domácí úlohy BONUS.

odevzdat spolu s 3. sérií (nejspíš 8.12.)

Přečtěte si Logicomix. (Pokud se vám to nechce číst celé, tak si přečtěte aspoň těch pár stěžejních částí, kde se děje nějaká matematika.)

4. (1 bod) Kolik koláčků snědl Russell Fregemu? Při čí přednášce myslel Poincaré na párky? Kdo seděl vedle Russella na Gödelově přednášce?

5. (2 body) Proč nešel Russell studovat reálnou analýzu? Tato otázka si zasluhuje zamyšlení a odpověď aspoň jednou košatou větou.

Body budou přičteny k celkovému skóre z domácích úloh.