

Domácí úlohy 5.
odevzdat do 25.5. 10:40

Pracujte nad tělesem $\mathbb{C}$.

1. (7 bodů) Buď V projektivní přímka v $\mathbb{P}^2$. Dokažte, že $\Gamma_h(V) \simeq K[x, y]$, $K_h(V) \simeq K(x, y)$ (těleso racionálních funkcí dvou proměnných), $K(V) \simeq K(t)$ (těleso racionálních funkcí jedné proměnné). Dokonce platí silnější tvrzení: při ztotožnění $K_h(V) = K(x, y)$ platí $K(V) = K(\frac{x}{y})$ (racionální funkce nad zlomkem $\frac{x}{y}$).

Návod, část 1. Díky projektivní transformaci úloha vyjde pro všechny přímky stejně, můžete tedy bez újmy na obecnosti předpokládat například $V = V(z)$.

Návod, část 2. První dvě vlastnosti jsou vcelku zřejmé. K té poslední musíte vyjádřit všechny prvky $K(V)$ pomocí operací $+$, $-$, $\cdot$, $^{-1}$ na prvcích K a zlomku $\frac{x}{y}$. Například $\frac{x}{x+y} = (\frac{x+y}{x})^{-1} = (1 + (\frac{x}{y})^{-1})^{-1}$. Postup zobecněte.

2. (7 bodů) Najděte všechny singulární body projektivní křivky dané polynomem

$$xy^4 + yz^4 + xz^4,$$

spočtete jejich násobnost a určete tečny.

3. (7 bodů) Spočtete křížicí čísla pro všechna křížení projektivních křivek

$$x^3 + y^3 + (x^2 + y^2)z \cap x^3 + y^3 - 2xyz.$$