Domácí úlohy 11.

odevzdat do 17.12. 12:00

(počítá se max. 15 bodů)

1. (4 body) Rozhodněte, zda pro danou množinu A a danou operaci (označme ji zatím $*$) existují operace $'$ a konstanta e tak, aby $(A, *, ', e)$ byla grupa.

a) $A = \mathbb{Q}$, operace $\cdot$.

b) $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, operace $\circ$ definovaná $a \circ b = a \cdot b$ pro $a > 0$ a $a \circ b = \frac{a}{b}$ pro $a < 0$.

c) $A = \mathbb{Z}$, operace $*$ definovaná $a * b = a + (-1)^a b$.

2. (2 body) Rozhodněte, zda následující podmnožiny tvoří podgrupu grupy $\mathbf{S}_4$.

a) $\{id, (a\ b)(c\ d) :\ a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}$ po dvou různé $\}$.

b) $\{id, (a\ b\ c) :\ a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$ po dvou různé $\}$.

3. (4 body) Buď $\mathbf{G} = \langle \frac{4}{5}, \frac{7}{3} \rangle \leq \mathbb{Q}$. (Rozumí se aditivní grupa $\mathbb{Q}$.) Jak vypadají prvky této grupy? Je tato grupa cyklická, tj. existuje $a \in G$ takové, že $\mathbf{G} = \langle a \rangle$?

4. (5 bodů) Dokažte, že

$$GL_2(\mathbb{Q}) = \left\langle \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \right\rangle$$