Domácí úlohy 4.

odevzdat do 30.10. 12:00 (středa!)

(počítá se max. 15 bodů)

Přečtěte si následující text o uspořádáných množinách a vyřešte níže uvedená cvičení. Většinu materiálu byste měli znát z diskrétní matematiky, pojmy suprema, infima a svazu jsou pro vás nejspíš nové.

Definice. Relaci $\leq$ na množině X nazýváme *částečné uspořádání*, pokud je

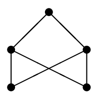
(1) *reflexivní*, tj. $x \leq x$ pro všechna $x \in X$,
(2) *tranzitivní*, tj. $x \leq y$ a $y \leq z$ implikuje $x \leq z$,
(3) *antisymetrická*, tj. $x \leq y$ a $y \leq x$ implikuje $x = y$.

Alternativně říkáme, že $(X, \leq)$ je *uspořádaná množina*. Uspořádání se nazývá *lineární*, pokud navíc pro každé x, y nastane $x \leq y$ nebo $y \leq x$.

Příklady.

- Na množině přirozených čísel uvažujme obvyklé uspořádání $1 < 2 < 3 < \ldots$; uspořádaná množina $(\mathbb{N}, \leq)$ je lineární.
- Na množině přirozených čísel uvažujme uspořádání dělitelnosti, tj. „a je menší než b pokud $a \mid b$“; uspořádaná množina $(\mathbb{N}, |)$ *není* lineární: např. čísla 2, 3 jsou neporovnatelné.
- Na množině $P(X)$ všech podmnožin dané množiny X uvažujme uspořádání inkluzí, tj. „A je menší než B pokud $A \subset B$“; je-li $|X| > 1$, pak uspořádaná množina $(P(X), \subseteq)$ není lineární: např. dvě různé jednoprvkové množiny jsou neporovnatelné.

Konečné uspořádané množiny se často zadávají pomocí tzv. *Hasseova diagramu.* Jde o graf relace $\leq$, přičemž nekreslíme smyčky (reflexivita), vynecháváme všechny hrany, jejichž existence je zaručena tranzitivitou, a místo šipek kreslíme neorientované hrany tak, aby větší prvky byly výše. Např.

A =  **B** =

Definice. Řekneme, že prvek $a \in X$ je v $(X, \leq)$

- *největší*, pokud pro každé $b \in X$ platí $b \leq a$;
- *nejmenší*, pokud pro každé $b \in X$ platí $b \geq a$;
- *maximální*, pokud neexistuje žádné $b \in X$ takové, že $b > a$;
- *minimální*, pokud neexistuje žádné $b \in X$ takové, že $b < a$.

Příklady.

- Uspořádaná množina **A** má jeden největší prvek, jeden maximální (ten samý), žádný nejmenší a dva minimální prvky.
- Uspořádaná množina **B** má jeden největší (a zároveň maximální) a jeden nejmenší (a zároveň minimální) prvek. Je to lineární uspořádání.
- Uspořádaná množina $(\mathbb{N}, \leq)$ má nejmenší prvek 1, ale žádný maximální prvek.
- Uspořádaná množina $(\mathbb{N}, |)$ přirozených čísel s relací dělitelnosti má nejmenší prvek 1, ale žádný maximální prvek. Uspořádaná množina $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ má za minimální prvky právě všechna prvočísla.

Definice. Nechť $Y \subseteq X$. Řekneme, že prvek $a \in X$ je v $(X, \leq)$

- *horní mez* množiny Y, pokud $a \geq y$ pro každý prvek $y \in Y$;
- *supremum* množiny Y, pokud to je nejmenší horní mez Y; značíme jej $a = \sup Y$;
- *dolní mez* množiny Y, pokud $a \leq y$ pro každý prvek $y \in Y$;
- *infimum* množiny Y, pokud to je největší dolní mez Y; značí se $a = \inf Y$.

Jinými slovy, supremum množiny Y je nejmenší prvek množiny X, který je větší nebo rovný než všechny prvky Y. Podobně, infimum množiny Y je největší prvek množiny X, který je menší nebo rovný než všechny prvky Y.

Příklady.

- V uspořádané množině **A** podmnožina sestávající z obou minimálních prvků nemá supremum ani infimum. Infimum proto, že nemá ani žádnou dolní mez. Horní meze sice tato podmnožina má tři, avšak žádná z nich není nejmenší.
- V uspořádané množině **B** má každá neprázdná podmnožina supremum i infimum. Obecně, v každé lineárně uspořádané množině má každá neprázdná *konečná* podmnožina supremum i infimum, přičemž $\sup Y = \max Y$ a $\inf Y = \min Y$. Pozor, pro nekonečné to obecně nefunguje: např. v $(\mathbb{N}, \leq)$ neexistuje $\sup \mathbb{N}$.
- V uspořádané množině $(P(X), \subseteq)$ má každá podmnožina infimum i supremum, přičemž $\inf Y$ je rovno průniku všech množin z Y a $\sup Y$ je rovno sjednocení všech množin z Y.

Uvědomte si, že $\sup \emptyset$ je rovno nejmenšímu prvku, pokud takový v $(X, \leq)$ existuje; podobně, $\inf \emptyset$ je rovno největšímu prvku, pokud takový existuje.

Definice. *Svazem* nazýváme každou uspořádanou množinu, ve které existují suprema a infima všech *dvouprvkových* podmnožin (pak také zřejmě existují suprema a infima všech *neprázdných konečných* podmnožin). *Úplným svazem* nazýváme každou uspořádanou množinu, ve které existují suprema a infima všech podmnožin.

Tedy v úplném svazu existuje nejmenší i největší prvek ($\sup \emptyset$ a $\inf \emptyset$).

Příklady.

- Uspořádaná množina **A** není svaz.
- Lineárně uspořádáná množina je vždy svaz, přičemž $a \vee b = \max(a, b)$, $a \wedge b = \min(a, b)$. Tedy $(\mathbb{N}, \leq)$ je svaz, ale není úplný: např. $\sup \mathbb{N}$ neexistuje.
- $(P(X), \subseteq)$ je úplný svaz: $\sup\{A, B\} = A \cup B$, $\inf\{A, B\} = A \cap B$.

---

1. (4 bodů) Dokažte, že uspořádaná množina $(\mathbb{N}, |)$ je svaz. Dokažte pečlivě, co je supremum a co infimum množiny $\{a, b\}$.

2. (6 bodů) Označme $\mathrm{Eq}(X)$ množinu všech ekvivalencí na množině X uspořádanou inkluzí.

a) Nakreslete Hasseův diagram pro $\mathrm{Eq}(\{1, 2, 3\})$.
b) Dokažte, že $\mathrm{Eq}(X)$ je svaz.

3. (8 bodů) Zjistěte, zda existuje a jaký nejmenší počet prvků může mít uspořádaná množina s danými vlastnostmi. Pokud existuje, uveďte ji. Pokud neexistuje, dokažte to.

a) Má suprema všech podmnožin, ale existuje podmnožina, která nemá infimum.
b) Má dva maximální a dva minimální prvky.
c) Má dva největší prvky.
d) Má jeden minimální, ale žádný nejmenší prvek.