Nová učebnice obecné algebry, a o výuce algebry pro studenty učitelství

David Stanovský

Abstrakt

První část příspěvku je věnována mojí nové učebnici Základy algebry*, jejímu obsahu a v českých podmínkách novému přístupu k tématu. Druhá část pak popisuje zkušenosti a závěry z pěti let výuky obecné algebry pro studenty učitelství.*

Rád bych v tomto příspěvku zhodnotil zkušenosti posbírané během pěti let, kdy jsem učil obecnou algebru pro studenty učitelství i odborné matematiky na MFF UK (a v jednom semestru na NGTU v Novosibirsku). Výsledkem práce je mimo jiné učebnice *Základy algebry*, kterou letos vydalo nakladatelství Matfyzpress [4]. Tento příspěvek bude mít spíše charakter osobní výpovědi, než odborné práce, přesto věřím, že uvedené zkušenosti budou zajímavé pro učitele na vysokých i středních školách (těm druhým zvláště doporučuji sekci 2.3).

1 Nová učebnice obecné algebry

1.1 Obsah

Když jsem začínal přednášet algebru, marně jsem hledal učebnici, které bych se mohl držet a kterou bych mohl doporučit studentům ke čtení. Starší české materiály mi nevyhovovaly stylem, učebnice anglo-americké obsahem. Rozhodl jsem se tedy vytvořit text vlastní, který by obsahem odpovídal sylabům kurzů obecné algebry na MFF UK a zároveň byl napsán v moderním stylu, přístupnějším studentům, tak jak je reprezentován např. učebnicemi [1], [2] nebo [3].

Učebnice pokrývá především klasická témata:

- *základy komutativní algebry* – elementární teorie čísel, Gaussovské a Eukleidovské obory, polynomy jedné proměnné a jejich kořeny;
- *základy teorie grup* – cyklické grupy, rozklady podle podgrup a Lagrangeova věta, působení grupy na mmnožině;
- *základy teorie těles* – rozšíření konečného stupně, rozkladová nadtělesa, algebraický uzávěr, konstrukce konečných těles;

- stručné úvody do teorie okruhů a obecných (univerzálních) algeber.

Do učebnice jsem se snažil zařadit aplikace teorie v jiných oblastech matematiky: v kapitole o Gaussovských oborech tak čtenář najde sekci věnovanou rozšířením celých čísel a jejich užití při řešení diofantických rovnic, v kapitole o grupách se diskutuje problém diskrétního logaritmu a jeho užití v kryptografii, působení na množině je motivováno Burnsideovou větou, jež umožňuje elegantně řešit úlohy elementární kombinatoriky vzhledem k dané grupě symetrií, teorie rošíření těles je aplikována na konstrukce pravítkem a kružítkem, je uveden Wantzelův důkaz neřešitelnosti trisekce úhlu a podobných úloh. Učebnice obsahuje velké množství konkrétních příkladů vycházejících především z aritmetiky (vlastnosti číselných oborů) a kombinatoriky (symetrie konečných objektů).

Text vychází z koncepce studia na MFF UK, která je v tomto smyslu podobná většině českých i evropských škol. Kurz obecné algebry probíhá zpravidla ve druhém ročníku, zpravidla v rozsahu 4/2 a navazuje na znalosti ročníku prvního: pochopení výstavby moderní matematiky, znalost základní matematické terminologie, alespoň částečně vyvinutá schopnost abstraktního myšlení. Co se týče faktických znalostí, v příkladech se využije část maticového počtu (maticové grupy) a teorie těles zásadním způsobem potřebuje pojem abstraktního vektorového prostoru. Odhaduji, že ke kompletnímu zvládnutí učebnice je třeba cca 70–80 vyučovacích hodin (tj. 5–6 přednášek týdně po dobu jednoho semestru, nepočítaje cvičení). Učebnice tedy nechává dostatek prostoru k výběru témat podle zaměření přednášky i vkusu přednášejícího.

1.2 Styl

V porovnání se staršími českými učebními texty má nová učebnice tři specifika. Za prvé, je použit moderní přístup *„rings first, groups next"*: začíná se teorií dělitelnosti v oborech integrity, která je studentům bližší, neboť příslušné objekty studia (čísla, polynomy) jsou jim důvěrně známy. Teprve poté, co studenti vstřebají ideu abstraktní algebraické struktury, je vyložena teorie grup, okruhů a těles v klasickém stylu definice – příklady – vlastnosti – aplikace. Za druhé, teorie grup, okruhů a těles je budována na základě stručného úvodu do univerzální algebry: pojmy podalgebry, homomorfismu či direktního součinu jsou vysvětleny v obecnosti. Třetím specifikem je vyčlenění pro studenty velmi obtížného konceptu faktorobjektu do samostatné kapitoly, aby lépe vynikla souvislost těchto pojmů pro jednotlivé typy struktur. Všechny tři novinky se mi osvědčily ve výuce.

Důležitým aspektem učebnice je postup od konkrétního k abstraktnímu. Nejprve je vyložena elementární teorie čísel, teprve potom je definován obor integrity, motivován potřebou zkoumat podobné koncepty pro jiné objekty, jako např. polynomy nebo komplexní rozšíření celých čísel. Důkaz Základní věty aritmetiky pak slouží jako vzor pro analogický důkaz věty o existenci a jednoznačnosti ireducibilních rozkladů v obecných oborech integrity. K pojmu obecné algebry vede cesta přes abstraktní definici vektorových prostorů (v lineární algebře) a přes abstraktní definici oboru integrity (na začátku kurzu). Kapitola o teorii grup začíná sekcí o cyklických grupách, které jsou všem důvěrně známy (počítání modulo), až pak následuje abstraktní teorie rozkladů. Řada abstraktních vět je motivována a zpětně ilustrována na konkrétních příkladech, často z jiného oboru: typickým příkladem je působení grupy na množině a Burnsideova věta podané na příkladech enumerace kombinatorických objektů až na dané symetrie.

1.3 Srovnání

Nakolik jsem byl schopen dohledat, v češtině a slovenštině vyšly čtyři velké učebnice algebry a řada skript. První samostatnou učebnicí byly Kořínkovy *Základy algebry* (1. vydání 1956), z dnešního pohledu je však tato kniha zastaralá. V 70. letech vyšly v překladu dvě učebnice dvojice autorů Birkhoff, Mac Lane (Alfa Bratislava 1973, 1979) a klasická učebnice Kurošova (Academia, 1977). Jde o inspirativní texty, zejména svým konkrétním přístupem a řadou příkladů, nicméně již neodpovídají současnému pojetí výuky obecné algebry u nás i ve světě. Jedinou velkou původní českou učebnicí je monografie *Algebra* autorského kolektivu pod vedením Ladislava Procházky (Academia 1990), která je však svým stylem k výuce nevhodná. Skripta, která vyšla v posledních 15 letech v Brně a Olomouci, jsou poměrně formální a osobně mi nevyhovují volbou témat.

Učebnice určené pro výuku na amerických univerzitách mají výrazně nižší vstupní předpoklady, a to jak na úroveň abstraktního myšlení studentů, tak faktických znalostí – v úvodu zpravidla najdeme řadu témat, která jsou u nás pokryta na střední škole, jako např. úvod do dělitelnosti v celých číslech, matematickou indukci, komplexní čísla apod. Styl výkladu bývá často příliš rozvláčný. Kladem těchto učebnic bývá konkrétnější přístup, důraz na příklady a aplikace a pěkná cvičení.

2 Obecná algebra ve výuce budoucích učitelů matematiky

2.1 Algebra ano či ne

Podle mého názoru základy obecné algebry do studijních plánů učitelství patří, stejně jako třeba projektivní geometrie nebo diferenciální rovnice, přestože je učitel ve středoškolské výuce beprostředně nevyužije. Všechny tři jmenované disciplíny tříbí znalosti z předmětů, které se na středních školách učí (byť některé z nich okrajově) – algebra dává nadhled nad elementární teorií čísel a rozšiřuje schopnosti kombinatorického počítání, projektivní geometrie dává alternativní pohled na klasickou geometrii, o významu diferenciálních rovnic v přírodních vědách nemluvě.

Otázka je, jakou formou, s jakým obsahem a v jakém rozsahu by se tyto předměty měly učit. Podle mého názoru a zkušeností by se mělo postupovat od konkrétního k abstraktnímu, a to dlouhodobě. Je zbytečné vysvětlovat teorii dělitelnosti v Gaussovských oborech, když studenti nikdy neslyšeli o Základní větě aritmetiky a neznají Eukleidův algoritmus (taková je situace na MFF UK podle oficiálních sylabů). Je zbytečné říkat definici grupy, aniž by studenti uměli pracovat s permutacemi a regulárními maticemi, a je škoda učit teorii grup ve chvíli, kdy studenti nevědí, jak vypadají, řekněme, izometrie v rovině nebo symetrie základních geometrických objektů (pravidelné n-úhelníky, krychle).

Tím chci naznačit, že základy obecné algebry by měly v nějakém smyslu zastřešovat tu část studia matematiky, která se věnuje diskrétním strukturám a geometrii, podávat jednotící náhled na situace, s nimiž se studenti setkali v konkrétnějších oborech (pro ostatní pokročilé matematické disciplíny to platí zrovna tak). Z toho plyne, že přednášku z algebry by bylo vhodné zařadit do pozdější fáze studia tak, aby mohla navazovat na konkrétnější disciplíny, jako je lineární algebra, teorie čísel a eukleidovská geometrie. Mimo jiné by tato přednáška měla přijít v době, kdy už studenti bezpečně zvládnou středoškolskou matematiku (viz níže). Optimálním rozsahem by podle mého názoru a zkušeností byly 3 hodiny přednášky a 2 hodiny cvičení, což by umožnilo vysvětlit základy komutativní algebry a teorie grup, včetně několika aplikací se středoškolským aspektem (diofantické rovnice, Burnsideova věta, řešitelnost úloh pravítkem a kružítkem).

2.2 Algebra na MFF UK

Situace na naší fakultě je do značné míry opakem výše uvedených úvah. V minulosti zde převažoval formální styl s důrazem na abstraktní stránku věci, výklad od abstraktního ke konkrétnímu a nevelká vazba na související obory a aplikace. Situace se mění pomalu.

Konkrétně, studenti učitelství matematiky na MFF UK mají povinné dva kurzy obecné algebry: ve třetím semestru mají předmět Algebra I s rozsahem 2/2, který má studenty uvést do studia algebry, a v prvním ročníku navazujícího magisterského studia předmět Algebra II s rozsahem 2/2, který má ukázat aplikace. Já jsem byl v posledních pěti letech zodpovědný za úvodní kurz, v mezích daných tématy ke státním závěrečným zkouškám. V současné době věnuji přibližně dvě třetiny semestru Gaussovským oborům s důrazem na vlastnosti čísel a polynomů a třetinu semestru teorii grup.

Je velmi problematické, že algebra nemá na co navazovat. Kurz lineární algebry v 1. ročníku postrádá geometrické aspekty (alespoň podle sylabu), kurzy geometrie jsou později, kurz teorie čísel dokonce není v průběhu studia vůbec! (V sylabu žádného předmětu není např. Eulerova věta nebo počítání s kongruencemi $\equiv \pmod{n}$, zatímco ke státnicím mají studenti znát konstrukci faktorgrupy.)

2.3 Zkušenosti z výuky

Tolik vzletné úvahy o roli algebry v odborném vzdělání budoucích učitelů matematiky, a nyní k realitě výuky pro současné studenty. Je zřejmé, že pro naprostou většinu z nich je úroveň abstrakce v obecné algebře ve druhém ročníku zcela nezvladatelná. Ale nejde jen o styl myšlení. U zkoušky ve třetím(!) semestru pravidelně narážím na elementární neznalosti ze středoškolské matematiky, a co hůře, na celkové nepochopení logické výstavby matematiky.

Začnu popisem testu. Test obsahuje 17 otázek, třetinu bodů lze získat za *znění vět a definic* (zde kladu důraz na korektní formulace), třetinu za *jednoduché problémy*, jejichž řešení zpravidla obnáší dosazení konkrétních objektů do vhodné věty/definice nebo nalezení příkladu s danými vlastnostmi, a třetinu za *typové početní úlohy* v zásadě algoritmického rázu. Kompletní sada cca 500 úloh je k nalezení na webu [5]. Studenti musejí získat alespoň 2/3 bodů. Úspěšnost testu se pohybuje kolem 30%, přičemž zdaleka největší problémy působí prostřední část. Pojďme se podívat na nejčastější potíže.

Všechny části testu pochopitelně sledují, zda se studenti naučili faktické znalosti, ale tomu se věnovat nechci, mj. proto, že tento aspekt nečiní u dvouhodinové přednášky větší potíže (obecně se mi zdá, že schopnost studentů naučit se nazpaměť obrovské množství dat bez jejich porozumění se v posledních letech nezměnila, narozdíl od jiných schopností).

Důležitým aspektem první části testu je, zda jsou studenti schopni korektně formulovat matematické tvrzení. To je pro zhruba třetinu(!) z nich nepřekonatelný problém. Počínaje tím, že věty nedávají jazykový smysl, chybí jim podmět a/nebo přísudek, přes nepochopení konceptu předpokladu a závěru věty, rozdílu mezi větou a definicí, až po problém porozumění významu logických spojek a kvantifikátorů. Minimálně 10% studentů nechápe pojem implikace a nahrazuje jej například spojkou „a“ nebo prázdným místem. Téměř polovina studentů není schopna zapsat komplikovanější definici typu největšího společného dělitele. Pouhých cca 10% studentů je schopno korektně formulovat algoritmus (např. Eukleidův), někteří dokonce vůbec nerozumí slovu algoritmus.

V druhé části testu se zaměřuji na to, aby studenti uměli použít větu v daném kontextu. Uveďme kokrétní příklad Lagrangeovy věty, která říká, že je-li G konečná grupa a H její podgrupa, pak velikost H dělí velikost G. Otázka „Napište Lagrangeovu větu“ má úspěšnost relativně velkou, prakticky 100% u studentů, kteří pochopili, jak formulovat matematickou větu. Otázka „Může mít 100-prvková grupa 32-prvkovou podgrupu?“ má, překvapivě, úspěšnost menší. Otázka „Může mít 100-prvková grupa 25-prvkovou podgrupu?“ má úspěšnost tristní, přičemž nejčastější špatnou odpovědí je „Ano, podle Lagrangeovy věty“. Koncept příkladu a protipříkladu je u většiny studentů nepřítomný. Často se stává, že studenti umějí recitovat definici (např. komutativní grupy), ale selhávají na její aplikaci v konkrétním případě (např. „Tvoří symetrie čtverce komutativní grupu?“)

Co se týče výpočetních úloh, nejčastěji se vyskytují tři chyby. 1) Použití věty v situaci, kdy nejsou splněny předpoklady – i přesto, že výsledek je očividně špatný. Oblíbenou odpovědí je např. „poslední cifra čísla 2^{4444} je 1“ aplikací Eulerovy věty, která říká, že $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, ale samozřejmě jen tehdy, když $\mathrm{NSD}(a,n) = 1$. Tato chyba je běžná ve všech předmětech. 2) Neschopnost aplikace obecného postupu v daném konkrétním oboru. Např. student zná Eukleidův algoritmus a umí dělit Gaussova čísla se zbytkem, ale působí mu potíže spočítat NSD dvou Gaussových čísel, nebyla-li tato úloha explicitně na cvičeních. 3) Mezery ve středoškolské matematice. Zde nejčastěji narážím na neschopnost řešení kombinatorických úloh („kolika způsoby lze navléknout na nit 5 červených, 4 modré a 3 zelené korálky?“) a problémy s komplexními čísly. V ústní části pak ještě na nepochopení principu matematické indukce.

2.4 Závěr

Soudím, že kurz obecné algebry do výuky studentů učitelství matematiky patří. Studenti, kteří látku zvládli (nakonec jich zas tak málo nebývá), mi většinou říkají, že je předmět bavil a že se jim zdá přínosný. Hlavní otázkou je, kam tento předmět zařadit, aby byl smysluplný pro větší podíl studentů. Obecněji, bakalářské studium by mělo vést k tomu, aby studenti bezpodmínečně zvládali logickou stavbu matematiky a s jistým odborným nadhledem veškerou středoškolskou látku – a také bychom to měli testovat u státních závěrečných zkoušek. Na abstraktní teorie zastřešující matematické vzdělání je dost času v navazujícím magisterském studiu.

Literatura

[1] M. Anderson, T. Feil, *A first course in abstract algebra: rings, groups, and fields*, Chapman&Hall, 2005.

[2] L. Childs, *A Concrete Introduction to Higher Algebra*, UTM, Springer, 3rd edition 2009.

[3] V. Shoup, *A Computational Introduction to Number Theory and Algebra*, on-line at `http://www.shoup.net/ntb/`.

[4] D. Stanovský, *Základy algebry*, Matfyzpress, 2010.

[5] `www.karlin.mff.cuni.cz/~stanovsk/vyuka/zalg.htm`