ÚLOHY, KTERÉ SE OBJEVILY V SEMINÁŘI

(po třech úlohách ke každému dílu)

Otázkou "kolik je" máme na mysli "najděte nějakou známou množinu, která je stejně velká jako".

1.
Kolik je polynomů s racionálními koeficienty? (tj. výrazů $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, kde n je nezáporné celé číslo a $a_0, \ldots, a_n$ jsou libovolné koeficienty)

2.
Kolik je

(a) posloupností přirozených čísel? (tj. funkcí $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$)
(b) permutací přirozených čísel? (tj. bijekcí $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$)
(c) involucí přirozených čísel? (tj. bijekcí $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takových, že $f = f^{-1}$)

3.
Dokažte pořádně následující tvrzení.

(a) Je-li $A \prec \mathbb{N}$, pak je A konečná.
(b) Prosté zobrazení $A \to B$ existuje právě tehdy, když existuje surjektivní zobrazení $B \to A$.
(c) Je-li $A \times A \approx A$, pak $A^n \approx A$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
(d) Je-li $A_1 \approx B_1$ a $A_2 \approx B_2$, pak $A_1 \times A_2 \approx B_1 \times B_2$.

4.

(a) Dokažte, že existuje reálná funkce, jejíž graf protne graf každé spojité reálné funkce.
(b) Dokažte, že existuje rozklad přímky na nespočetně mnoho nespočetných po dvou disjunktních podmnožin.

5.
Buď M množina bodů v rovině. Řekneme, že je *pěkná*, pokud žádné tři body z M neleží na přímce a žádné tři přímky určené body z M se neprotínají v bodě neležícím v M.

(a) Dokažte, že pro každé n přirozené existuje n-prvková pěkná množina bodů v rovině.
(b) Dokažte, že existuje spočetná pěkná množina bodů v rovině.
(c) *(Mimo soutěž.)* Existuje pěkná množina bodů v rovině mohutnosti kontinua?

6.
Nechť A, B, U jsou libovolné množiny. Dokažte, že

(a) $U^{A\times B} \approx (U^A)^B \approx (U^B)^A$;
(b) jsou-li A, B disjunktní, pak $U^{A\cup B} \approx U^A \times U^B$;
(c) je-li $A \preceq B$, pak $U^A \preceq U^B$ a $A^U \preceq B^U$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

7.

Dokažte, že existuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která na každém intervalu (a, b) nabývá všech reálných hodnot (tj. pro každé $y \in \mathbb{R}$ existuje $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) = y$).

8.

Dokažte, že existuje množina bodů v rovině, kterou protne každá přímka v právě dvou bodech.

9.

Kolik existuje (navzájem různých) podmnožin $\mathbb{N}$ takových, že každé dvě různé mají konečný průnik? (Poznámka: k řešení stačí pouze znalosti obsažené v 1. dílu.)

ÚLOHY, KTERÉ SE NEPOUŽILY

k části I.

(1) Nechť $\mathcal{C}$ je systém po dvou disjunktních množin. Nechť $B \prec \mathcal{C}$. Dokažte, že existuje $C \in \mathcal{C}$ taková, že $B \cap C = \emptyset$.
(2) Dokažte, že množina X je konečná právě tehdy, když *(Tarski)* neexistují množiny $X_1, X_2, \dots \subseteq X$ takové, že $X_n \supset X_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a to je právě tehdy, když *(Dedekind)* každá vlastní podmnožina množiny X je (ostře) menší než X.
(3) Existuje rostoucí řetězec (tj. soubor do sebe navzájem vnořených množin) podmnožin $\mathbb{N}$ mohutnosti kontinua?
(4) Existuje pro každé $a \in \langle 0, 1)$ množina $A_a \subseteq \mathbb{N}$ taková, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$a < b \text{ právě tehdy, když } A_a \subset A_b \text{ ?}$$

k části II.

(1) Nechť A je nekonečná a $B \subset A$, $B \prec A$. Dokažte, že $A \setminus B \approx A$.
(2) Množina $G \subseteq \mathbb{R}$ se zve otevřená, pokud pro každé $a \in G$ existuje otevřený interval $I \subseteq \mathbb{R}$ takový, že $a \in I \subseteq G$. Dokažte, že existují množiny, jež nelze získat jako spočetný průnik otevřených množin. Návod: Každou otevřenou množinu lze rozložit na nejvýše spočetně mnoho disjunktních otevřených intervalů.

ŘEŠENÍ ÚLOH, KTERÉ SE OBJEVILY V SEMINÁŘI

1.

Označme P_n množinu všech polynomů stupně n s racionálními koeficienty. Pak lze množinu všech racionálních polynomů napsat jako $\bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$. Polynom stupně n je jednoznačně určen svými koeficienty $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$. Máme tedy bijekci $\mathbb{Q}^{n+1} \to P_n$ přiřazující $(n+1)$-tici $(a_0, \dots, a_n)$ polynom $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Přitom ovšem $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$, a tudíž $P_n \approx \mathbb{Q}^{n+1} \approx \mathbb{N}^{n+1} \approx \mathbb{N}$ (viz 3. úloha), tj. P_n je spočetná množina. Množina všech polynomů je tedy spočetným sjednocením spočetných množin, a proto je spočetná.

2.

Označme A množinu všech posloupností přirozených čísel, B množinu všech permutací přirozených čísel a C množinu všech involucí přirozených čísel. Protože $C \subseteq B \subseteq A$, máme $C \preceq B \preceq A$.

Nejprve si všimněme, že každé posloupnosti přirozených čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ lze (prostě) přiřadit množinu $\{(n, a_n) : n = 1, 2, \dots\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Máme tedy prosté zobrazení $A \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Přitom ovšem $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, takže také $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Množina A tedy není větší než mohutnost kontinua.

Dále zkonstruujeme prosté zobrazení $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to C$. Podmnožině $A \subseteq \mathbb{N}$ přiřadíme následující zobrazení $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pokud $x \in A$, položíme $f_A(2x) = 2x + 1$, $f_A(2x + 1) = 2x$. Pokud $x \notin A$, položíme $f_A(2x) = 2x$, $f_A(2x + 1) = 2x + 1$. Je vidět, že právě definované f_A je involucí, a pro $A \neq B$ máme $f_A \neq f_B$ (je-li $x \in A \setminus B$ nebo $x \in B \setminus A$, pak $f_A(2x) \neq f_B(2x)$).

Shrnuto, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq C \preceq B \preceq A \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Z Cantor-Bernsteinovy věty a faktu $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$ dostáváme, že všechny tři zadané množiny mají mohutnost kontinua.

3.

(a)

Nechť $A \prec \mathbb{N}$ není konečná. Nalezneme po dvou různá $a_1, a_2, \dots \in A$, čímž ukážeme, že $\mathbb{N} \preceq A$ (při prostém zobrazení $n \mapsto a_n$), což dá spor.

Buď $a_1 \in A$ libovolné. Máme-li zkonstruována $a_1, \dots, a_n$, zvolíme libovolné $a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Zbývá dokázat, že je množina $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ neprázdná. Kdyby však $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\} = \emptyset$, pak $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, což je spor s tím, že A není konečná.

(b)

Nechť $f : A \to B$ je prosté zobrazení. Definujeme zobrazení $g : B \to A$. Je-li $b = f(a)$ pro nějaké $a \in A$, pak položíme $g(b) = a$. Je-li $b \in B$, avšak $b \neq f(a)$ pro všechna $a \in A$, zvolíme $g(b)$ libovolně. Takto definované g je surjektivní, neboť každý prvek $a \in A$ je obrazem nějakého prvku $b \in B$, konkrétně prvku $f(a)$.

Naopak, nechť $g : B \to A$ je surjektivní zobrazení. Definujeme zobrazení $f : A \to B$. Pro každý prvek $a \in A$ vybereme nějaký prvek $b \in B$ takový, že $g(b) = a$ (díky surjektivitě g takový jistě existuje) a položíme $f(a) = b$. Takto definované f je prosté, neboť je-li $f(a_1) = f(a_2) = b$, pak $a_1 = g(b)$ a $a_2 = g(b)$, tj. $a_1 = a_2$.

(c)

Dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je tvrzení triviální, pro $n = 2$ je obsaženo v předpokladech. Nechť tvrzení platí pro nějaké $n \geq 2$, tj. mějme bijekci $f : A^n \to A$. Platí $A^{n+1} \approx A^n \times A$ při bijekci $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \mapsto ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$, dále $A^n \times A \approx A \times A$ při bijekci $((a_1, \ldots, a_n), a) \mapsto (f(a_1, \ldots, a_n), a)$ a nakonec $A \times A \approx A$ podle předpokladu věty. Máme tedy $A^{n+1} \approx A$, c.b.d.

(d)

Buďte $f_1 : A_1 \to B_1$ a $f_2 : A_2 \to B_2$ bijekce. Je snadné ověřit, že zobrazení $f : A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2$ definované $f(a_1, a_2) = (f_1(a_1), f_2(a_2))$ je také bijekce.

4.

(a)

Protože spojitých reálných funkcí je stejně mnoho jako reálných čísel, existuje bijekce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{C}(\mathbb{R}))$ (tj. $\varphi(x)$ je spojitá funkce přiřazená reálnému číslu x). Položme $f(x) = (\varphi(x))(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ (tj. $f(x)$ je hodnota funkce $\varphi(x)$ v bodě x). Dokážeme, že graf funkce f protne graf každé spojité funkce.

Je-li g spojitá, pak $g = \varphi(x)$ pro jisté $x \in \mathbb{R}$. Tudíž $f(x) = (\varphi(x))(x) = g(x)$, čili grafy f a g se protínají v bodě x.

(b)

Není-li možné překážku přelézt, zkusíme ji obejít. Rozložit rovinu na systém $\mathcal{A}$ obsahující nespočetně mnoho nespočetných pod dvou disjunktních podmnožin dokáže každý. Např. tak, že vezme všechny rovnoběžky s nějakou pevně zvolenou přímkou — každá přímka má mohutnost kontinua (existuje očividná bijekce na $\mathbb{R}$) a rovnoběžek s danou přímkou je také mohutnost kontinua (musejí protnout každý bod libovolně zvolené různoběžky).

Nyní vezmeme bijekci $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a systém $\mathcal{A}$ přeneseme na přímku. Nechť $\mathcal{B} = \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Je jasné, že každá množina $f(A)$ je nespočetná (neboť A je nespočetná a $f|_A$ je bijekce), $\mathcal{B}$ pokrývá celou přímku (neboť $\mathcal{A}$ pokrývá celou rovinu) a prvky $\mathcal{B}$ jsou po dvou disjunktní (neboť takové byly i prvky $\mathcal{A}$ a f je prosté).

5.

Zkonstruujeme množiny M_n, $n \in \mathbb{N}$, přičemž M_n bude n-prvková pěkná množina a bude platit $M_n \subset M_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Každá jednoprvková množina je zřejmě pěkná, vybereme tedy libovolný bod Z a položíme $M_1 = \{Z\}$. Nechť nyní máme zkonstruovánu pěknou n-prvkovou množinu M_n. Hledáme vhodný bod X takový, aby $M_{n+1} = M_n \cup \{X\}$ byla pěkná množina. Množina M_n obsahuje n bodů, které určují nejvýše n^2 přímek. Tyto přímky se protínají v nejvýše $(n^2)^2 = n^4$ bodech, které určují nejvýše n^8, tedy konečně mnoho, přímek. Říkejme všem těmto přímkám ošklivé. Protože konečně mnoho přímek nepokryje celou rovinu, existuje bod X neležící na žádné ošklivé přímce. Dokážeme, že takový bod X vyhovuje našim podmínkám. V $M_{n+1} = M_n \cup \{X\}$ neleží žádné tři různé body na přímce, protože v opačném případě by buď ležely tři různé body z M_n na jedné přímce (což nelze, neboť M_n je pěkná), nebo by bod X ležel na nějaké přímce určené dvěma body z M_n (což nelze, neboť taková přímka je ošklivá). Dále, kdyby se tři přímky p, q, r určené body M_{n+1} protínaly v jednom bodě mimo M_{n+1}, pak (protože M_n je pěkná) jedna z nich, řekněme p, by byla určena bodem X a nějakým bodem $Y \in M_n$. Bod X by tedy ležel na přímce určené bodem Y a průsečíkem přímek q, r, a tedy X by ležel na ošklivé přímce, což je spor. Množina M_{n+1} je tedy také pěkná, $(n+1)$-prvková.

Tím máme vyřešen konečný případ. Nyní položme $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Tato množina je zřejmě spočetná. Dokážeme, že je pěkná. Nechť leží tři různé body X, Y, Z na přímce. Protože $X, Y, Z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, existují $k, l, m \in \mathbb{N}$ taková, že $X \in M_k$, $Y \in M_l$, $Z \in M_m$. Protože $M_i \subset M_j$ pro každá $i < j$, všechny tři body X, Y, Z leží v M_n, přičemž $n = \max(k, l, m)$. Tím však máme spor s pěkností množiny M_n. Analogicky se ukáže i druhá vlastnost — kdyby se tři přímky určené body M protínaly v jednom bodě mimo M, pak by tato situace nastala již v nějakém M_n, spor. Množina M je tedy pěkná spočetná.

Podobným způsobem lze dokázat existenci pěkné množiny mohutnosti kontinua. Bude předvedeno v dnešním dílu seriálu.

6.

Principem této úlohy byla práce se zobrazeními, které nějakému zobrazení přiřadí jiné zobrazení. Po pochopení toho principu je vše jasné.

(a)

Definujeme zobrazení $\varphi : (U^A)^B \to U^{A\times B}$ předpisem, který každému zobrazení $f : B \to U^A$ přiřadí zobrazení $\varphi(f) : A \times B \to U$, $(a, b) \mapsto (f(b))(a)$ (uvědomte si, že $f(b)$ je zobrazení $A \to U$). Je třeba dokázat, že φ je bijekce, tj. že je prosté a surjektivní.

Jsou-li $f, g \in (U^A)^B$, $f \neq g$, pak existuje $b \in B$ takové, že $f(b) \neq g(b)$. Pak ovšem existuje $a \in A$ takové, že $(f(b))(a) \neq (g(b))(a)$, tj. $(\varphi(f))(a, b) \neq (\varphi(g))(a, b)$, čili $\varphi(f) \neq \varphi(g)$. Zobrazení φ je tedy prosté.

Dále, je-li $h \in U^{A\times B}$, pak $h = \varphi(f)$ pro $f : B \to U^A$, které každému $b \in B$ přiřadí zobrazení $f(b) : A \to U$, $a \mapsto h(a, b)$. Zobrazení φ je tedy surjektivní.

(b)

Definujeme zobrazení $\varphi : U^A \times U^B \to U^{A\cup B}$ předpisem, který každé dvojici zobrazení (f, g), $f : A \to U$, $g : B \to U$, přiřadí zobrazení $\varphi(f, g) : A \cup B \to U$, $a \mapsto f(a)$ pro $a \in A$, $b \mapsto g(b)$ pro $b \in B$. Poznamenejme, že žádná hodnota není definována dvakrát, neboť A, B jsou disjunktní. Opět je třeba dokázat, že φ je bijekce.

Jsou-li $(f, g), (f', g') \in U^A \times U^B$, $(f, g) \neq (f', g')$, pak $f \neq f'$ nebo $g \neq g'$. Tedy $f(a) \neq f'(a)$ pro nějaké $a \in A$ nebo $g(b) \neq g'(b)$ pro nějaké $b \in B$. V obou případech zjevně $\varphi(f, g) \neq \varphi(f', g')$.

Dále, je-li $h \in U^{A\cup B}$, pak $h = \varphi(h|_A, h|_B)$. Zobrazení φ je tedy surjektivní.

(c)

Zvolme prosté zobrazení $\alpha : A \to B$. Definujeme zobrazení $\varphi : A^U \to B^U$ předpisem, který každému zobrazení $f : U \to A$ přiřadí zobrazení $\alpha \circ f : U \to B$. Jsou-li $f, g \in A^U$, $f \neq g$, pak $f(u) \neq g(u)$ pro nějaké $u \in U$, a tedy $\alpha(f(u)) \neq \alpha(g(u))$, protože α je prosté. Zobrazení φ je tedy také prosté, tj. $A^U \preceq B^U$.

Zvolme surjektivní zobrazení $\beta : B \to A$. Definujeme zobrazení $\psi : U^A \to U^B$ předpisem, který každému zobrazení $f : A \to U$ přiřadí zobrazení $f \circ \beta : B \to U$. Jsou-li $f, g \in U^A$, $f \neq g$, pak $f(a) \neq g(a)$ pro nějaké $a \in A$, přitom však ze surjektivity $a = \beta(b)$ pro nějaké $b \in B$, a tedy $f(\beta(b)) \neq (g(\beta(b))$. Zobrazení ψ je tedy prosté, tj. $U^A \preceq U^B$.

7.

Označme $\kappa = |\mathbb{R}|$. Snadno nahlédneme, že množina $\mathcal{I} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ všech otevřených intervalů má mohutnost kontinua. Tudíž i množina $\mathbb{R} \times \mathcal{I}$ má mohutnost kontinua. Zvolíme tedy očíslování této množiny $\mathbb{R} \times \mathcal{I} = \{(y_\alpha, I_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ ordinály z κ. Definujeme množiny A_α a funkce $f_\alpha : A_\alpha \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $\alpha \in \kappa$ podmínky:

(i) existuje $x \in I_{\alpha^+}$ takové, že $f(x) = y_{\alpha^+}$;
(ii) $A_\alpha \subset A_{\alpha^+}$, $|A_\alpha| = |\alpha|$;
(iii) $f_{\alpha^+}(u) = f_\alpha(u)$ pro každé $u \in A_\alpha$;

Pomocí těchto funkcí pak na závěr definujeme hledanou funkci.

(I). Položme $A_0 = f_0 = \emptyset$.

(II). Mějme nyní definovány funkce $f_0, \dots, f_\alpha$ tak, že jsou podmínky splněny. Protože každý interval obsahuje mohutnost kontinua reálných čísel, kdežto $|A_\alpha| = |\alpha| \prec \kappa = |\mathbb{R}|$, existuje $x \in I_\alpha \smallsetminus A_\alpha$. Definujeme $A_{\alpha^+} = A_\alpha \cup \{x\}$, $f_{\alpha^+}(x) = y_\alpha$ a $f_{\alpha^+}(u) = f_\alpha(u)$ pro každé $u \in A_\alpha$. Všechny tři podmínky jsou zjevně splněny.

(III). Je-li α limitní ordinál, položme $A_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} A_\beta$ a definujme zobrazení f_α předpisem $f_\alpha(u) = f_\beta(u)$, kde $\beta \in \alpha$ je libovolné takové, že $u \in A_\beta$. Zobrazení je korektně definováno, neboť hodnoty $f_\beta(u)$ jsou stejné pro všechna f_β, do jejichž definičního oboru u patří. Přitom zřejmě platí $|A_\alpha| = |\alpha|$ (sjednocení $|\alpha|$ množin mohutnosti nejvýše $|\alpha|$).

Tvrdíme, že funkce f_κ je „téměř řešením“ úlohy. Je-li dán interval (a,b) a $y \in \mathbb{R}$, existuje $\alpha \in \kappa$ takové, že $(a,b) = I_\alpha$ a $y = y_\alpha$ (neboť jsme číslovali všechny takové dvojice). Podle podmínky (i) existuje $x \in I_{\alpha^+}$ takové, že $f_{\alpha^+}(x) = y_\alpha$, a tedy také $f_\kappa(x) = y_\alpha = y$.

Zobrazení f_κ by splňovalo zadání úlohy, kdyby $A_\kappa = \mathbb{R}$. Pokud tomu tak není, položíme $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R} \smallsetminus A_\kappa$. Takto dodefinovaná funkce je řešením úlohy.

8.

Označme $\mathcal{P}$ množinu všech přímek v rovině. Nejprve dokážeme, že $\mathcal{P} \approx \mathbb{R}$. Zobrazení $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}$ přiřazující dvojici bodů (A, B) přímku AB je surjektivní, a tedy $\mathcal{P} \preceq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}$. Přitom vezmeme-li všechny rovnoběžky s danou přímkou, máme mohutnost kontinua různých přímek. Z Cantor-Bernsteinovy věty tedy plyne $\mathcal{P} \approx \mathbb{R}$.

Označme $|\mathcal{P}| = |\mathbb{R}| = \kappa$. Očíslujeme množinu všech přímek pomocí κ, tj. označme $\mathcal{P} = \{p_\alpha : \alpha \in \kappa\}$. Zkonstruujeme transfinitní rekurzí množiny M_α takové, že M_α splňuje pro každé $\alpha \in \kappa$ podmínky:

(i) M_{α^+} protne každou z přímek $p_0, \dots, p_\alpha$ v právě dvou bodech;
(ii) žádné tři body z M_α neleží na jedné přímce;
(iii) $M_\alpha \subset M_{\alpha^+}$;
(iv) je-li α nekonečné, pak $|M_\alpha| = |\alpha|$; je-li α konečné, pak $|M_\alpha|$ je konečná.

Množina M_κ pak zřejmě bude řešením úlohy, neboť protne každou přímku v právě dvou bodech.

(I). Položme $M_0 = \emptyset$.

(II). Mějme zkonstruovánu množinu M_α tak, že podmínky jsou splněny. Díky podmínce (ii) tato množina protne přímku p_α v nejvýše dvou bodech. Množinu M_{α^+} definujeme v závislosti na počtu průsečíků.

(1) *2 průsečíky.* Položme $M_{\alpha^+} = M_\alpha$.
(2) *1 průsečík.* Položme $M_{\alpha^+} = M_\alpha \cup \{A\}$, přičemž bod A zvolíme na přímce p_α tak, aby neležel na žádné přímce určené body z M_α (takový bod na p_α určitě existuje, neboť body z M_α určují nejvýše $|M_\alpha \times M_\alpha| \approx \alpha \times \alpha \approx \alpha \prec \mathbb{R}$ přímek, které mají nejvýše stejné množství průsečíků s p_α).
(3) *0 průsečíků.* Položme $M_{\alpha^+} = M_\alpha \cup \{A, B\}$, přičemž body $A \neq B$ zvolíme stejně jako předchozím případě.

(III). Je-li α limitní ordinál, položme $M_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} M_\beta$. Podmínka (iv) plyne z věty o sjednocení $|\alpha|$ množin mohutnosti nejvýše $|\alpha|$, ostatní podmínky jsou splněny triviálně.

Poznámka. Nalezená množina má mohutnost kontinua. Nešlo by nalézt menší? Samozřejmě ne — vezmeme-li všechny rovnoběžky s danou přímkou, máme mohutnost kontinua přímek, které jsou po dvou disjunktní. Pokud tedy chceme z každé vybrat alespoň jeden bod, bude jich mohutnost kontinua.

9.

Tuto úlohu vyřešíme podobnou fintou jako úlohu 5b. Nebudeme hledat podmnožiny $\mathbb{N}$, nýbrž podmnožiny jiné spočetné množiny M. Konkrétně, označme M množinu všech konečných podmnožin $\mathbb{N}$. Jak bylo ukázáno v prvním dílu seriálu, M je spočetná. Tvrdíme, že existuje mohutnost kontinua podmnožin M takových, že každé dvě různé mají konečný průnik. Víc jich ani existovat nemůže, neboť všech podmnožin spočetné množiny je také mohutnost kontinua.

Nechť A je nekonečná podmnožina $\mathbb{N}$. Označme $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ její prvky. Definujeme

$$M_A = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \ldots\}.$$

Je vidět, že M_A obsahuje pouze konečné podmnožiny $\mathbb{N}$, a tedy $M_A \subseteq M$. Dále, nechť jsou A, B dvě různé nekonečné podmnožiny $\mathbb{N}$, $A = \{a_1 < a_2 < \ldots\}$, $B = \{b_1 < b_2 < \ldots\}$. Zvolme n takové, že $a_n \neq b_n$. Potom zřejmě $\{a_1, \ldots, a_n\} \neq \{b_1, \ldots, b_n\}$, a tedy také $\{a_1, \ldots, a_m\} \neq \{b_1, \ldots, b_m\}$ pro každé $m \geq n$. Takže množiny M_A, M_B jsou různé a navíc mají nejvýše $n-1$ (tj. konečně mnoho) společných prvků.

Označme $\mathcal{M} = \{M_A : A \subseteq \mathbb{N} \text{ nekonečná}\}$. Jak jsme ukázali, $\mathcal{M}$ obsahuje takové množiny, že každé dvě různé mají konečný průnik. Navíc, zobrazení $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus M \to \mathcal{M}$ přiřazující $A \mapsto M_A$ je bijekce. Přitom $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ má mohutnost kontinua a M je spočetná, takže $\mathcal{M} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus M$ má mohutnost kontinua.

Na závěr zvolme bijekci $\psi : M \to \mathbb{N}$ a označme $\mathcal{N} = \{\psi(M) : M \in \mathcal{M}\}$, přičemž výrazem $\psi(M)$ myslíme množinu $\{\psi(x) : x \in M\}$. Lze snadno nahlédnout, že systém $\mathcal{N}$ má požadované vlastnosti.