Kapitola 1

Bodová a stejnoměrná konvergence

Motivační otázky:

$$1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}.$$

Můžeme tuto rovnici derivovat? Tj. platí

$$1 + 2x + 3x^2 + ... = \frac{1}{(1-x)^2}?$$

Kdy lze zaměnit limitu a derivaci?
Je limita spojitých funcí spojitá funkce?

Příklad 1.1 *Nechť $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$. Pak $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ je funkce daná předpisem $f(x) = 0$ pro $x \in [0,1)$ a $f(1) = 1$. Tedy v tomto případě limita spojitých funkcí není spojitá funkce.*

Definice 1.1 *Nechť $f_n : M \to \mathbb{R}$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f_n konvergují k funkci f bodově na množině M, jestliže $\forall x \in M$ je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Značíme $f_n \underset{M}{\to} f$.*

Definice 1.2 *Nechť $f_n : M \to \mathbb{R}$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f_n konvergují k funkci f stejnoměrně na množině M, jesliže*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_o \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall x \in M : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f$ (je-li množina M zřejmá z kontextu, tak používáme značení $f_n \rightrightarrows f$, nebo jen $f_n \rightrightarrows$).

Řekneme, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} v_i(x)$ konverguje stejnoměrně na M k $S(x)$, jestliže posloupnost jejich částečných součtů $\sum_{i=1}^{n} v_i(x)$ konverguje stejnoměrně k $S(x)$ na M.

Poznámka 1.1 *f_n konvergují k funkci f bodově na množině M $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ $\forall x \in M$ $\exists n_o \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0 :$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Rozdíl je v prohození pořadí $\forall x$ a $\exists n_0$. Zatímco u stejnoměrné konvergence volba n_0 nezávisí na bodu x (je pro všechna x stejná), u bodové konvergence záviset může.*

Poznámka 1.2

- $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \underset{M}{\rightarrow} f$,
- $f_n \underset{M_1}{\rightrightarrows} f$ *a* $f_n \underset{M_2}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \underset{M_1 \cup M_2}{\rightrightarrows} f$.

  Pro $\varepsilon > 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_1$ $\forall x \in M_1 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ a $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_2$ $\forall x \in M_2 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Tedy $\forall n > \max\{n_1, n_2\}$ $\forall x \in M_1 \cup M_2 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Cvičení 1.1 *Nechť $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f$. Jsou-li všechny f_n na M omezené, je také f na M omezená. Dokažte.*

Věta 1.1 *Nechť $f_n \underset{M}{\rightarrow} f$. Označme $\sigma_n = \sup\limits_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$.
Pak $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.*

Důkaz

($\Leftarrow$) Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ platí $\sigma_n = \sup\limits_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Tedy pro každé $x \in M$ a každé $n > n_0$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, a proto f_n konverguje k f stejnoměrně.

($\Rightarrow$) Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ a $\forall x \in M$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, tedy $\sigma_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

$\square$

Věta 1.2 (B.C. podmínka pro $\rightrightarrows$) *Posloupnost funkcí f_n je stejnoměrně konvergentní na M (existuje funkce f taková, že $f_n \rightrightarrows f$) právě tehdy, když $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n, m > n_0$ $\forall x \in M$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ (Bolzano-Cauchyova podmínka).*

Důkaz

($\Rightarrow$) Je-li posloupnost f_n stejnoměrně konvergentní na M, pak existuje funkce f taková, že $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_o \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall x \in M$: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_o, \forall x \in M.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Nejprve ukážeme bodovou konvergenci (tj. existenci limitní funkce f). Zvolme $x \in M$, pak platí B.C. podmínka pro posloupnost $f_n(x)$ (posloupnost reálných čísel), a proto je tato posloupnost konvergentní. Označme $f(x)$ její limitu.

Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n, m > n_0$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (B.C. podmínka). Tedy pro $n > n_0$ a libovolné $x \in M$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Věta 1.3 (Weierstrassova) *Nechť* $\forall i \in \mathbb{N}\ \forall x \in M$ *platí* $|v_i(x)| \leq w_i(x)$. *Pak* $\sum_{i=1}^{\infty} w_i(x) \rightrightarrows\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |v_i(x)| \rightrightarrows$ *a* $\sum_{i=1}^{\infty} v_i(x) \rightrightarrows$.

Důkaz $\sum_{i=1}^{\infty} v_i(x) \rightrightarrows$ právě tehdy, když platí B.C. podmínka pro posloupnost částečných součtů $\sum_{i=1}^{n} v_i(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m > n > n_0\ \forall x \in M$ platí $|\sum_{i=1}^{n} w_i(x) - \sum_{i=1}^{m} w_i(x)| = |w_{n+1}(x) + w_{n+2}(x) + ... + w_m(x)| < \varepsilon$ ($\sum_{i=1}^{\infty} w_i(x) \rightrightarrows$ a tedy platí B.C. podmínka). Jelikož

$$|v_{n+1}(x) + ... + v_m(x)| \leq |v_{n+1}(x)| + ... + |v_m(x)| \leq |w_{n+1}(x) + w_{n+2}(x) + ... + w_m(x)| < \varepsilon,$$

tak platí B.C. podmínka i pro $\sum_{i=1}^{n} |v_i(x)|$ a $\sum_{i=1}^{n} v_i(x)$ a tedy jsou obě řady stejnoměrně konvergentní.

□

Věta 1.4 *Nechť f_n je posloupnost funkcí a platí:*

i) $f_n \underset{(a,b)}{\rightrightarrows} f$,

ii) existuje vlastní limita $\lim_{x\to b_-} f_n(x)$, *označme tuto limitu* F_n.

Pak

a) Existuje vlastní limita $F = \lim_{n\to\infty} F_n$, *b) existuje vlastní limita* $\lim_{x\to b_-} f(x)$ *a platí* $\lim_{x\to b_-} f(x) = F$.

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b_-} f_n(x) = \lim_{x\to b_-} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Důkaz

a) Jelikož $f_n \underset{(a,b)}{\rightrightarrows}$, tak platí B.C. podmínka, tedy pro každé $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n, m > n_0$ $\forall x \in (a,b) : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak

$$|F_n - F_m| = |\lim_{x\to b_-} f_n(x) - \lim_{x\to b_-} f_m(x)| = \lim_{x\to b_-} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

tedy platí B.C. podmínka i pro posloupnost reálných čísel F_n, a proto je tato posloupnost konvergentní, tedy existuje vlastní limita $F = \lim_{n\to\infty} F_n$.

b) Zvolme $\varepsilon > 0$. Z bodů i), ii) a a) postupně máme, že

- $\exists n_0^1 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0^1$ $\forall x \in (a,b)$ $: |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$,
- pro kažné $n \in \mathbb{N}$ $\exists \delta_n > 0$ $\forall x \in (b - \delta_n, b) : |f_n(x) - F_n| < \frac{\varepsilon}{3}$,
- $\exists n_0^2 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0^2 : |F_n - F| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pro $n^3 > \max\{n_0^1, n_0^2\}$ a $\forall x \in (b - \delta_{n^3}, b)$ dostaneme

$$\begin{aligned} |f(x) - F| &= |f(x) - f_{n^3}(x) + f_{n^3}(x) - F_{n^3} + F_{n^3} - F| \\ &\leq |f(x) - f_{n^3}(x)| + |f_{n^3}(x) - F_{n^3}| + |F_{n^3} - F| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $\lim_{x\to b_-} f(x) = F$.

□

Důsledek 1.5 *Nechť* f_n *jsou spojité funkce na intervalu* (a,b) *a* $f_n \underset{(a,b)}{\rightrightarrows} f$. *Pak* f *je spojitá na* (a,b).

Důkaz Zvolme $c \in (a,b)$, pak dle věty 1.4 platí $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to c} f_n(x) = \lim_{x\to c} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Tedy

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to c} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(c) = f(c).$$

□

Věta 1.6 *Nechť f_n je posloupnost reálných funkcí, které mají na intervalu J vlastní derivaci. Nechť dále platí:*

i) Existuje bod $x \in J$ takový, že $f_n(x)$ je konvergentní.

ii) $f'_n \underset{J}{\rightrightarrows}$.

Označme $g = \lim_{n\to} f'_n$, pak

a) Existuje funkce f na J taková, že $f_n \to f$ na intervalu J a tato konvergence je navíc stejnoměrná na každé omezené podmnožině $J_o \subset J$.

b) $f' = g$ na J. Jinak zapsáno

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

Důkaz

a) Nechť posloupnost $\{f_n\}$ konverguje v $x_0 \in J_o \subset J$ a J_o je omezená množina. Označme $K = \sup_{x\in J_o} |x - x_0|$, pak pro libovolné $x \in J_o$ dostaneme

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) + f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\
&\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\
&= |[f'_n(\xi) - f'_m(\xi)](x - x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\
&= |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|K + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|,
\end{aligned}$$

kde $\xi \in (x, x_0)$ (nebo $\xi \in (x_0, x)$). Pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0^1 \in \mathbb{N}$ takové, že $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechny $n, m > n_0^1$ a existuje $n_0^2 \in \mathbb{N}$ takové, že $|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2K}$[1] pro všechny $n, m > n_0^2$. Tedy

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

pro všechna $n, m > \max\{n_0^1, n_0^2\}$ a pro všechna $x \in J_o$. Tedy posloupnost $\{f_n(x)\}$ splňuje B.C. podmínku a proto je stejnoměrně konvergentní na J_o.

[1] Jelikož ξ je z omezené podmnožiny intervalu J a
f'_n konverguje na omezené podmnožině stejnoměrně a tak pro něj platí B.C. podmínka viz věta 1.2

b) Nechť $x \in J$ a označme $\varphi_n(h) = \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}$, pak $f_n'(x) = \lim_{h\to 0} \varphi_n(h)$. Ukažme nejdříve stejnoměrnou konvergenci funkcí φ_n. Zvolme $\varepsilon > 0$ a $\tilde{h} > 0$, pak

$$\begin{aligned} |\varphi_n(h) - \varphi_m(h)| &= \frac{1}{h}|f_n(x+h) - f_n(x) - (f_m(x+h) - f_m(x))| \\ &= |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon \end{aligned}$$

pro všechny $n, m > n_0$ a všechny $h \in (0, \tilde{h})$, kde $\xi \in (0, h)$. Tedy $\varphi_n \rightrightarrows$ dle věty 1.2. S použitím věty 1.4 dostaneme

$$\begin{aligned} g &= \lim_{n\to\infty} f_n' = \lim_{n\to\infty}\lim_{h\to 0} \varphi_n(h) = \lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty} \varphi_n(h) \\ &= \lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x). \end{aligned}$$

□

Příklad 1.2 *Bodová konvergence v alespoň jednom bodě x_0 v předchozí větě je podstatná. Nechť $f_n(x) = x + n$, pak $f_n'(x) = 1$, tedy $f_n'(x) \rightrightarrows 1$, ale přesto $f_n(x)$ nekonverguje.*

Věta 1.7 (limita a Riemannův integrál) *Nechť $f_n(x)$ mají na $[a, b]$ Riemannův integrál a $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Důkaz

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \\ &\le \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\ &\le \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sigma_n dx = \lim_{n\to\infty} (b-a)\sigma_n = 0. \end{aligned}$$

V poslední rovnosti využíváme větu 1.1.

□

Poznámka 1.3 *Leibnizovo kritérium a Abel-Dirichletovo kritérium platí i pro stejnoměrnou konvergenci řad, pokud v předpokladech nahradíme konvergenci stejnoměrnou konvergencí a omezenost stejnoměrnou omezeností. Kde stejnoměrnou omezeností funkcí* $f_n(x)$ *na množině myslíme, že existuje* $K \in \mathbb{R}$ *takové, že pro všechny* $x \in M$ *a všechny* $n \in \mathbb{N}$ *je* $|f_n(x)| < K$.