

Úvodní písemka

1. Upravte výraz:

$$\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{x} + y\right)}{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}}.$$

2. Řešte rovnici v
- $\mathbb{R}$
- .

$$\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x} + \cos^2 x \operatorname{tg} x = 1.$$

3. Je dáno komplexní číslo

$$a = \frac{15-5i}{1+2i} - \frac{1-3i}{i} + (3+i)(-1+2i).$$

Vypočtete a^5 .

4. V množině reálných čísel řešte nerovnici:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2) \leq -2.$$

5. Vypočtete limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 1}.$$

6. V komplexních číslech řešte rovnici

$$\bar{z} = z^2.$$

7. Řešte rovnici

$$1 - \sin 3x = \cos^2 3x.$$

8. Řešte v
- $\mathbb{R}$
- rovnici:

$$4^x + 3^{x+3} = 4^{x+3} - 3^{x+2}.$$

9. V
- $\mathbb{R}$
- řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 3^{\log x} + 4^{\log y} &= 4 \\ 3^{2 \log x} - 4^{2 \log y} &= 8 \end{aligned}$$

10. Určete desátý člen aritmetické posloupnosti, ve které
- $a_2 + a_3 = 9$
- a
- $a_2 \cdot a_3 = 14$
- .

11. Součet prvních čtyř po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je 80. Určete ji, je-li
- $a_4 = 9a_6$
- .

Řešení - písemka

1.

$$\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{x} + y\right)}{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}} = \frac{\frac{x^2+xy+y^2}{x}}{\frac{(x^2+y^2)(x^3-y^3)}{x^2y^2(x^2+y^2)}} = \frac{x^2+xy+y^2}{x} \frac{x^2y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \frac{xy^2}{x-y}, \quad x \neq 0, y \neq 0, x \neq y.$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x} + \cos^2 x \operatorname{tg} x &= 1 \\ \sin x \cos x + \sin x \cos x &= 1 \\ 2 \sin x \cos x &= \sin 2x = 1 \\ x &= \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} a &= \frac{15-5i}{1+2i} \frac{1-2i}{1-2i} - \frac{1-3i}{i} \frac{i}{i} + (-3-2-i+6i) = \frac{15-10-35i}{5} + (3+i) + (-5+5i) = 1-7i+3+i-5+5i \\ &= -1-i = \sqrt{2} \left(\sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} i \right) \Rightarrow a^5 = 4\sqrt{2} \left(\sin \frac{25\pi}{4} + \cos \frac{25\pi}{4} i \right) = 4\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} i \right) = 4+4i. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2) &\leq -2 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x-2)(x+2) &\leq \log_{\frac{1}{2}} 4, \quad (x^2 - 4) > 0 \\ x^2 - 4 &\geq 4 \\ x &\geq 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 - \frac{3}{x})}{x^2(1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2.$$

6.

$$\begin{aligned}\bar{z} &= z^2 \\ a - bi &= (a^2 - b^2) + 2abi \\ \Rightarrow -b &= 2ab \Rightarrow a = \frac{-1}{2} \vee b = 0 \\ \Rightarrow a &= a^2 - b^2 \Rightarrow 0, 1, \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}1 - \sin 3x &= \cos^2 3x \\ 1 - \sin 3x &= 1 - \sin^2 3x \\ (1 - \sin 3x)(1 - (1 + \sin 3x)) &= 0 \Rightarrow \sin 3x = 1 \vee \sin 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \vee x = \frac{k\pi}{3}.\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}4^x(1 - 4^3) &= 3^x(-3^3 - 3^2) \\ \left(\frac{4}{3}\right)^x &= \frac{4 \cdot 3^2}{4^3 - 1} \\ x &= \log_{\frac{4}{3}} \frac{4 \cdot 3^2}{4^3 - 1} = \log_{\frac{4}{3}} \frac{36}{63} = \log_{\frac{4}{3}} \frac{4}{7} = \frac{\log \frac{4}{7}}{\log \frac{4}{3}}\end{aligned}$$

$$9. \quad A = 3^{\log x}, B = 4^{\log y} \Rightarrow A + B = 4, A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = 8 \Rightarrow A = 3, B = 1 \Rightarrow \log x = 1, \log y = 0 \Rightarrow x = 10, y = 1.$$

10.

$$\begin{aligned}a_2 &= a, 2a + d = 9, a^2 + da = 14 \Rightarrow d = 9 - 2a \Rightarrow a^2 + a(9 - 2a) = 14 \\ \Rightarrow a^2 - 9a + 14 &= (a - 7)(a - 2) = 0 \Rightarrow a = 2, d = 5, a_{10} = a_2 + 8d = 42, \vee a = 7, d = -5, a_2 = -33.\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}a_4 &= 9a_6 \Rightarrow d = \pm 3 \vee a_4 = a_6 = 0, d = 3 \Rightarrow a(1 + 3 + 9 + 27) = 80 \\ \Rightarrow a &= 2, d = -3 \Rightarrow a(1 - 3 + 9 - 27) = -20a = 80 \Rightarrow a = -4, a_4 = 0 \Rightarrow a = 80, d = 0.\end{aligned}$$

Grafy funkcí

Načrtněte grafy následujících funkcí

1. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$
2. $f(x) = |\ln |x||$
3. $f(x) = \frac{x+2}{|x+2|}$
4. $f(x) = \ln(x+1) + 3$
5. $f(x) = \frac{2 \cos^2 x}{\cos x - |\cos x|}$
6. $f(x) = \ln \sin x$
7. $f(x) = \ln(\ln \sin x)$
8. $f(x) = \sqrt{\frac{\cot g x}{|\cot g x|}}$

Důkazy

9. Dokažte, že číslo $\sqrt[n]{2}$ je iracionální $\forall n \geq 2$.
10. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.
11. Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.
12. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n je $n^3 - n$ dělitelné šesti.
13. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé přirozené číslo n platí
 - i) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
 - ii) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 - iii) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$
14. Jestliže $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ jsou tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, potom i a^2, b^2, c^2 jsou tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Dokažte.

Supremum, infimum, maximum a minimum

Zjistěte, zda v následujících množinách existuje maximum, minimum, supremum a infimum, a pokud ano, určete je.

15.

$$M = \left\{ \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

16.

$$M = \left\{ \frac{n}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

17.

$$M = \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Řešení

Důkazy

9. Necht $\sqrt[n]{2}$ je racionální, pak existují nesoudělná čísla $p, q \in \mathbb{Z}$, pro která platí $\sqrt[n]{2} = \frac{p}{q}$. Tedy $2q^n = p^n$, proto je p^n sudé, a tedy i p je sudé. Z toho plyne, že existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $p = 2k$. Pak $2q^n = 2^n k^n$, proto je q také sudé, což je ve sporu s nesoudělností p a q .
10. Necht je prvočísel konečně mnoho. Označme je postupně $p_1, p_2, \dots, p_n$. Potom $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ je číslo, které není dělitelné žádným z čísel $p_i, i = 1, \dots, n$, a tedy by bylo dalším prvočíslem. Proto nemůže být prvočísel konečně mnoho.

11.

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6n = 3(n^3 + 2n)$$

Stačí tedy ukázat, že $(n^3 + 2n)$ je dělitelné třemi.

I. Pro $n = 1$ dostaneme $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$, což je číslo dělitelné třemi

II. Nechť platí, že $n^3 + 3n$ je dělitelné třemi, pak $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3) = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 3)$. Tedy i $(n+1)^3 + 2(n+1)$ je dělitelné třemi, čímž je důkaz indukci hotov.

12. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$, což je součin tří po sobě jdoucích čísel a ten musí být dělitelný šesti.

13.

i) I. Pro $n = 1$ dostaneme $1 = 1$.

II. Nechť $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, pak $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$, čímž je důkaz indukci hotov.

ii) I. Pro $n = 1$ dostaneme $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$.

II. Nechť platí $1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, pak $1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+n)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, čímž je důkaz indukci hotov.

III) I. Pro $n = 1$ dostaneme $1^3 = 1^1$

II. Nechť platí $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n^2)$, pak $1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \dots + n^2) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = (1 + 2 + \dots + (n+1))^2$, čímž je důkaz indukci hotov.

14.

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = 2 \frac{1}{c+a} \Rightarrow \frac{a+2b+c}{ab+ac+bb+bc} - \frac{2}{c+a} = 0 \Rightarrow \frac{(a+2b+c)(c+a) - 2(ab+ac+bb+bc)}{(ab+ac+bb+bc)(c+a)} \Rightarrow$$

$$(a+2b+c)(c+a) - 2(ab+ac+bb+bc) = 0 \Rightarrow a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc - 2b^2 = 0 \Rightarrow a^2 + c^2 = 2b^2.$$

Supremum, infimum, maximum a minimum

15. Snadno nahlédneme, že $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, jelikož $1 \leq 1 + x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Jelikož $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+0^2} = 1$ pro $x = 0$ a $\frac{1}{1+x^2} \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$, je 1 maximem množiny M , a tedy i jejím supremem. Víme, že $0 < \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že existuje $\epsilon > 0$ takové, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí $\epsilon \leq \frac{1}{1+x^2}$, pak $\epsilon(1+x^2) \leq 1$. Pro $x = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ dostaneme $\epsilon(1 + \frac{1}{\epsilon}) = \epsilon + 1 > 1$, což je spor s předpokladem, tedy takové $\epsilon > 0$ neexistuje. Proto $\inf M = 0$. Jelikož 0 není prvkem množiny M , minimum neexistuje.

16. Nejprve ukažme, že posloupnost $\{\frac{n}{n+2}\}$ je rostoucí:

$$\frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+3}$$

$$n(n+3) = n^2 + 3n < n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2).$$

Pak $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{n}{n+2} \geq \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$, tedy $\min M = \inf M = \frac{1}{3}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $1 > \frac{n}{n+2}$. Předpokládejme, že existuje $K < 1$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $K > \frac{n}{n+2}$. Pak

$$K > \frac{n}{n+2}$$

$$\frac{2K}{1-K} > n$$

Tedy pro $n > \frac{2K}{1-K}$ dojdeme ke sporu. $1 \notin M$, tedy $\sup M = 1$ a maximum neexistuje.

17. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, pak $\frac{(-1)^{2m-1}}{2m-1} < 0 < \frac{(-1)^{2n}}{2n}$, tedy libovolný lichý člen posloupnosti $\frac{(-1)^n}{n}$ je menší, než libovolný sudý člen této posloupnosti. Proto se u vyšetřování suprema a maxima stačí omezit na sudé členy a u vyšetřování infima a minima jen na liché členy. Posloupnost $\frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, je klesající, tedy první člen je zároveň maximálním členem této posloupnosti $\Rightarrow \max M = \sup M = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$. Posloupnost $\frac{(-1)^{2m-1}}{2m-1} = \frac{-1}{2m+1}$, $m \in \mathbb{N}$ je rostoucí, tedy $\min M = \inf M = \frac{-1}{2 \cdot 1 - 1} = -1$.