Důležité řady

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k \leq 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje pro $|q| < 1$ a diverguje pro $|q| \geq 1$.

Kritéria konvergence

I. Řady s nezápornými členy ($a_n \geq 0$):

- (srovnávací kritérium) $a_n \leq b_n \Rightarrow (\sum b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje).
- (srovnávací kritérium) $a_n \leq b_n \Rightarrow (\sum a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum b_n$ diverguje).
- (limitní srovnávací kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty) \Rightarrow (\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \sum b_n$ konverguje).
- (podílové kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.
- (podílové kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje.
- (odmocninové kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.
- (odmocninové kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje.
- (Raabeovo kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje.
- (Raabeovo kritérium) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje.

II. Řady s obecnými členy:

- (nutná podmínka konvergence) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje.
- (Leibnizovo kritérium) Nechť platí:
  I. $a_n \geq 0$,
  II. $a_n \geq a_{n+1}$,
  III. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak řada $\sum (-1)^n a_n$ konverguje.

Zadání

1. Vyšetřete konvergenci řad:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+4}{n^2+3n+7}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(3n+1)\cdot 3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^4}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+2}{4n^2+n+3}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n+3}{4n-7}\right)^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+3)\cdot 3^n}{n!}$

g) $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(3n+4)\cdot 2^n}{3^{n+2}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+4n^2+8n+12}{3n^2-3}$

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2+2n-1}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi}{n}$

k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n 2a\,,\ a \in \mathbb{R}$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\cdot\sqrt{n}}$

m) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^5+1}}$

n) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \sin^2\frac{\pi}{n}$

o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{2^n}}$

p) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}}{n^2}$

2. Vyšetřete konvergenci řad:

a) $\sum \frac{n^2+n}{3^{n+1}}$

b) $\sum \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

c) $\sum \left(\frac{2}{5^{n+1}} + \frac{(2n)!}{3^n}\right)$

d) $\sum \frac{1}{(3-(-1)^n)^n}$

e) $\sum \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}$

f) $\sum (2^{\frac{1}{n}} - 1)^n$

g) $\sum (2^{\frac{1}{n}} - 1)$

h) $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

i) $\sum \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n^2+1}$

j) $\sum \frac{n!}{n^n}$

k) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

3. Vyšetřete konvergenci řad:

a) $\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$

b) $\sum (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

c) $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

d) $\sum (-1)^n \frac{1}{(n+1)^3}$

e) $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$

f) $\sum (-1)^n \frac{1}{n2^n}$

g) $\sum (-1)^n \frac{1}{n+(-1)^n}$

h) $\sum (-1)^n \frac{3^{n-1}}{2^{2n+1}}$

i) $\sum (-1)^n \frac{2^{n+2}}{3^{n-1}n!}$

j) $\sum (-1)^n \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$

k) $\sum (-1)^n \ln(1+\frac{1}{n})$

l) $\sum (-1)^n \sin(n)$

m) $\sum (-1)^n \frac{1}{n} \sin(\sqrt{n^2+n}-n)$

n) $\sum (-1)^n \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

o) $\sum (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})}$

Řešení

1. a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+4}{n^2+3n+7}$

   Srovnáme s harmonickou řadou (ta diverguje).

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n+4}{n^2+3n+7}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+7}{2n^2+4n} = \frac{1}{2} \in (0,\infty)$, tedy řada $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+4}{n^2+3n+7}$ diverguje.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(3n+1)\cdot 3^n}$

   Použijeme limitní podílové kritérium.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(3(n+1)+1)\cdot 3^{n+1}}}{\frac{2^n}{(3n+1)\cdot 3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(3n+1)}{3(3n+4)} = \frac{2}{3} < 1$, tedy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(3n+1)\cdot 3^n}$ konverguje.

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^4}}$

   Srovnáme s divergentí řadou $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}}{\frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^4}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^4}}{n^{\frac{4}{3}}} = 1 \in (0,\infty)$, tedy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^4}}$ diverguje.

   d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+2}{4n^2+n+3}$

   $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{4n^2+n+3} = \frac{1}{4} \neq 0$. Není splňena nutná podmínka konvergence, tedy řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+2}{4n^2+n+3}$ diverguje.

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n+3}{4n-7}\right)^n$

   Srovnáme s konvergentní řadou $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3n+3}{4n-7}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3(4n-7)}{4(3n+3)}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{12n-21}{12n+12}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{n\frac{\ln\left(\frac{12n-21}{12n+12}\right)}{\frac{12n-21}{12n+12}-1}\cdot\left(\frac{12n-21}{12n+12}-1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n\frac{\ln\left(\frac{12n-21}{12n+12}\right)}{\frac{12n-21}{12n+12}-1}\cdot\left(\frac{12n-21-12n-12}{12n+12}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{n\frac{\ln\left(\frac{12n-21}{12n+12}\right)}{\frac{12n-21}{12n+12}-1}\cdot\left(\frac{-33}{n(12+\frac{12}{n})}\right)} = e^{\frac{-33}{12}} = e^{-\frac{11}{4}} \in (0,\infty),$$

   tedy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n+3}{4n-7}\right)^n$ konverguje.

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+3)\cdot 3^n}{n!}$

   Použijeme limitní podílové kritérium.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1+3)\cdot 3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+3)\cdot 3^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3(n+4)}{(n+3)(n+1)} = 0 < 1$, tedy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+3)\cdot 3^n}{n!}$ konverguje.

   g) $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(3n+4)\cdot 2^n}{3^{n+2}}$

   Použijeme limitní podílové kritérium.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(3(n+1)+4)\cdot 2^{n+1}}{3^{n+1+2}}}{\frac{(3n+4)\cdot 2^n}{3^{n+2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2(3n+7)}{3(3n+4)} = \frac{2}{3} < 1$, tedy řada $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(3n+4)\cdot 2^n}{3^{n+2}}$ konverguje.

   h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+4n^2+8n+12}{3n^2-3}$

   $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+4n^2+8n+12}{3n^2-3} = \infty \neq 0$. Není splňena nutná podmínka konvergence, tedy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+4n^2+8n+12}{3n^2-3}$ diverguje.

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2+2n-1}}$
Srovnáme s harmonickou řadou.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{3n^2+2n-1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot\sqrt{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}{n} = \sqrt{3} \in (0,\infty)$, tedy řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2+2n-1}}$ diverguje.

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi}{n}$
Srovnáme s harmonickou řadou.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\pi}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\pi} \in (0,\infty)$, tedy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ diverguje.

k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n 2a\,,\ a \in \mathbb{R}$
Jde o geometrickou řadu s kvocientem $q = \sin^n 2a$. Řada $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n 2a$ konverguje pro $|\sin^n 2a| \neq 1$, tedy pro $a \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. Pro $a = \frac{\pi}{4} + k\pi$ řada diverguje do nekonečna ($q = 1$), pro $a = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ řada osciluje ($q = -1$).

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\cdot\sqrt{n}}$
Srovnáme s konvergentní řadou $\sum \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}}{\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\cdot\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}(1+\frac{1}{n})}{n^{\frac{3}{2}}} = 1 \in (0,\infty)$, tedy řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\cdot\sqrt{n}}$ konverguje.

m) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^5+1}}$
Srovnáme s konvergentní řadou $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{2n+3}{\sqrt{n^5+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}}{n^{\frac{5}{2}}(2+\frac{3}{n})} = 1 \in (0,\infty)$, tedy řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^5+1}}$ konverguje.

n) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \sin^2\frac{\pi}{n}$
Srovnáme s konvergentní řadou $\sum \frac{\pi^2}{n^2}$.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{n}} = 1 \in (0,\infty)$, tedy řada $\sum_{n=3}^{+\infty} \sin^2\frac{\pi}{n}$ konverguje.

o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{2^n}}$
Použijeme limitní podílové kritérium.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3(n+1)+1}{\sqrt{2^{n+1}}}}{\frac{3n+1}{\sqrt{2^n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+4}{(3n+1)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, tedy řada $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{2^n}}$ konverguje.

p) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}}{n^2}$
Srovnáme s harmonickou řadou.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{1}{\pi}}{\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\pi} \in (0,\infty)$, tedy řada $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}}{n^2}$ diverguje.

2. a) $\displaystyle\sum \frac{n^2+n}{3^{n+1}}$
Použijeme limitní podílové kritérium.
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+n+1}{3^{n+2}}}{\frac{n^2+n}{3^{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+2}{3(n^2+n)} = \frac{1}{3} < 1$, tedy řada $\sum \frac{n^2+n}{3^{n+1}}$ konverguje.

b) $\displaystyle\sum \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n\frac{\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}{\frac{n-1}{n+1}-1}\cdot\left(\frac{n-1}{n+1}-1\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}{\frac{n-1}{n+1}-1}\cdot\frac{-2n}{n+1}} = e^{-2} \neq 0$. Není splněna

nutná podmínka konvergence, tedy řada $\sum \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ diverguje.

c) $\sum \left(\dfrac{2}{5^{n+1}} + \dfrac{(2n)!}{3^n}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5^{n+1}} + \frac{(2n)!}{3^n}\right) = \infty \neq 0$. Není splňena nutná podmínka konvergence, tedy řada $\sum \left(\frac{2}{5^{n+1}} + \frac{(2n)!}{3^n}\right)$ diverguje.

d) $\sum \dfrac{1}{(3-(-1)^n)^n}$

Jelikož $\frac{1}{(3-(-1)^n)^n} \leq \frac{1}{2^n}$ a řada $\sum \frac{1}{2^n}$ konverguje, tak konverguje i řada $\sum \frac{1}{(3-(-1)^n)^n}$.

e) $\sum \dfrac{\sin(\frac{1}{n})}{n}$

Srovnáme s konvergentní řadou $\sum \frac{1}{n^2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 \in (0,\infty)$, tedy řada $\sum \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}$ konverguje.

f) $\sum (2^{\frac{1}{n}} - 1)^n$

Použijeme odmocninové kritérium.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (2^{\frac{1}{n}} - 1) = 0 < 1$, tedy řada $\sum (2^{\frac{1}{n}} - 1)^n$ konverguje.

g) $\sum (2^{\frac{1}{n}} - 1)$

Srovnáme s harmonickou řadou.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2^{\frac{1}{n}}-1)}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1)}{\frac{1}{n}\ln 2} \cdot \ln 2 = \ln 2 =\in (0,\infty)$, tedy řada $\sum (2^{\frac{1}{n}} - 1)$ diverguje.

h) $\sum \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

Srovnáme s konvergentní řadou $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \in (0,\infty)$,
tedy řada $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konverguje.

i) $\sum \dfrac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n^2+1}$

Jelikož $\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ a řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje, tak konverguje i řada $\sum \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n^2+1}$.

j) $\sum \dfrac{n!}{n^n}$

Použijeme limitní podílové kritérium.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n\ln\frac{n}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n\frac{\ln\frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1}-1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}-1\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln\frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1}-1}\cdot\frac{-n}{n+1}} =$
$e^{-1} < 1$, tedy řada $\sum \frac{n!}{n^n}$ konverguje.

k) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

Použijeme limitní podílové kritérium.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$, tedy řada $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konverguje.

3. a) $\sum (-1)^{n-1} \dfrac{n}{n^2+1}$.

Použijeme Leibnizovo kritérium.

I. $\frac{n}{n^2+1} > 0$,

II.

$$\frac{n}{n^2+1} \overset{?}{>} \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$
$$n((n+1)^2+1) \overset{?}{>} (n+1)(n^2+1)$$
$$n^3+2n^2+2n \overset{?}{>} n^3+n^2+n+1$$
$$n^2+n > 1, \quad \forall n > 0$$

III. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0,$

tedy řada $\sum(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ konverguje. Jelikož $\frac{n}{n^2+1} > \frac{1}{n+1}$, pak řada $\sum \frac{n}{n^2+1}$ diverguje, tedy řada $\sum(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ konverguje relativně.

b) $\sum(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$.
Použijeme Leibnizovo kritérium.

I. $\frac{\ln n}{n} \geq 0,$

II. $\frac{\ln n}{n} \overset{?}{>} \frac{\ln n+1}{n+1}$. Jelikž $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ pro $x > e$, tak je funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ klesající na (e, ∞), proto $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln n+1}{n+1}$ pro $n > e$.

III. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$

tedy řada $\sum(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ konverguje. Jelikož $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n+1}$, pak řada $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverguje, tedy řada $\sum(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ konverguje relativně.

c) $\sum(-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Použijeme Leibnizovo kritérium.

I. $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0,$

II. $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

III. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$

tedy řada $\sum(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje. Jelikož řada $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje, tedy řada $\sum(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje relativně.

d) $\sum(-1)^n \dfrac{1}{(n+1)^3}$.
Jelikož $\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$ a řada $\sum \frac{1}{n^3}$ konverguje, tedy řada $\sum(-1)^n\frac{1}{(n+1)^3}$ konverguje absolutně.

e) $\sum(-1)^n \dfrac{n}{n+1}$.
Jelikož $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1} \neq 0$, tak řada $\sum(-1)^n\frac{n}{n+1}$ diverguje.

f) $\sum(-1)^n \dfrac{1}{n2^n}$.
Jalikož $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$ a řada $\sum \frac{1}{2^n}$ konverguje, tedy řada $\sum(-1)^n\frac{1}{n2^n}$ konverguje absolutně.

g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n+(-1)^n}$.

$$s_{2n+1} = \sum_{n=2}^{2n+1}(-1)^k\frac{1}{k+(-1)^k} = \frac{1}{2+1} - \frac{1}{3-1} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{-3+2}{(2+1)(3-1)} + \dots + \frac{-1}{(2n+1)2n}$$
$$= -\left(\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}\right).$$

Jelikož $\left(\frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{4\cdot5} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}\right) < \sum_{k=2}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}$ a teleskopická řada konverguje, pak $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = A \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3} = A + 0 = A$, tedy $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+(-1)^n} = A$ a proto řada konverguje.

Absolutní konvergence: Srovnáme s harmonickou řadou. $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+(-1)^n}} = 1 \in (0,\infty)$, tedy řada $\sum \frac{1}{n+(-1)^n}$ diverguje a proto řada $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+(-1)^n}$ konverguje relativně.

h) $\sum(-1)^n \frac{3^{n-1}}{2^{2n+1}}$.
Řada $\sum(-1)^n \frac{3^{n-1}}{2^{2n+1}}$ konverguje absolutně, jelikož $\sum \frac{3^{n-1}}{2^{2n+1}}$ je geometrická řada s kvocientem $\frac{3}{4}$, a tedy konverguje.

i) $\sum(-1)^n \frac{2^{n+2}}{3^{n-1}n!}$.
Absolutní konvergence - podílové kritérium: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+3}}{3^n(n+1)!}}{\frac{2^{n+2}}{3^{n-1}n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3(n+1)} = 0 < 1$, tedy řada $\sum(-1)^n \frac{2^{n+2}}{3^{n-1}n!}$ konverguje absolutně.

j) $\sum(-1)^n \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$.
Použijeme Leibnizovo kritérium.

I. $\sqrt{\frac{n}{n^2+1}} \geq 0$,

II. jelikož je funkce $f(x) = \sqrt{x}$ rostoucí funkce a $\frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$ viz příklad a), tak platí $a_n > a_{n+1}$.

III. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+1}} = 0$,

tedy řada $\sum(-1)^n \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$ konverguje.
Absolutní konvergence: Jelikož pro $n > 1$ platí:

$$n^2 + 1 < n^3$$
$$\frac{1}{n^2} < \frac{n}{n^2+1},$$

pak $\frac{1}{n} < \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$, tedy řada $\sum \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$ diverguje a proto řada $\sum(-1)^n \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$ konverguje relativně.

k) $\sum(-1)^n \ln(1+\frac{1}{n})$.
Použijeme Leibnizovo kritérium.

I. $\ln(1+\frac{1}{n}) \geq 0$,

II. jelikož je funkce $f(x) = \ln x$ rostoucí a posloupnost $\{1+\frac{1}{n}\}$ klesající, tak je i posloupnost $\{\ln(1+\frac{1}{n})\}$ klesající.

III. $\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$,

tedy řada $\sum(-1)^n \ln(1+\frac{1}{n})$ konverguje.
Absolutní konvergence: Srovnáme s harmonickou řadou. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 \in (0,\infty)$, tedy řada $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ diverguje a proto řada $\sum(-1)^n \ln(1+\frac{1}{n})$ konverguje relativně.

l) $\sum(-1)^n \sin(n)$.
Jelikož interval $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}] + k\pi$ má délku $\frac{2\pi}{3} > 1$ a $|\sin(x)| > \frac{1}{2}$ pro všechna $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}] + k\pi$, tak pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n > n_0$ takové, že $|(-1)^n \sin(n) - 0| > \frac{1}{2}$. Proto $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin(n) \neq 0$ a tedy řada $\sum(-1)^n \sin(n)$ diverguje.

m) $\sum(-1)^n \frac{1}{n} \sin(\sqrt{n^2+n} - n)$.
Absolutní konvergence: Srovnáme s harmonickou řadou.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sin(\sqrt{n^2+n}-n)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sin(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\right) \in (0,\infty),$$

tedy řada $\frac{1}{n}\sin(\sqrt{n^2+n}-n)$ diverguje. Použijeme Leibnizovo kritérium.

I. $\frac{1}{n}\sin(\sqrt{n^2+n}-n) \geq 0$,

II. $a_n \stackrel{?}{>} a_{n+1}$: Označme $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+x}-x)}{x}$, pak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1\right)\cdot x - \sin(\sqrt{x^2+x}-x)}{x^2} \\ &= \frac{\cos(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot\left(\frac{2x^2+x-2x\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}}\right) - \sin(\sqrt{x^2+x}-x)}{x^2} \\ &= \frac{\cos(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot\left(\frac{(2x^2+x)^2-4x^2(x^2+x)}{2\sqrt{x^2+x}(2x^2+x+2x\sqrt{x^2+x})}\right) - \sin(\sqrt{x^2+x}-x)}{x^2} \\ &= \frac{\cos(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot\left(\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+x}(2x^2+x+2x\sqrt{x^2+x})}\right) - \sin(\sqrt{x^2+x}-x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\lim_{x\to\infty}\cos(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot\left(\frac{x^2}{2\sqrt{x^2+x}(2x^2+x+2x\sqrt{x^2+x})}\right) - \sin(\sqrt{x^2+x}-x) = 0 - \sin\left(\frac{1}{2}\right) < 0,$$

pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall x > n_0$ je $f'(x) < 0$, tedy je funkce $f(x)$ klesající na (n_0,∞) a proto je $a_n > a_{n+1}$ pro všechna $n > n_0$.

III. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin(\sqrt{n^2+n}-n) = 0$,

tedy řada $\sum(-1)^n\frac{1}{n}\sin(\sqrt{n^2+n}-n)$ konverguje relativně.

n) $\sum(-1)^n\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

Absolutní konvergence - odmocniconé kritérium:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{3} = \frac{e}{3} < 1,$$

řada $\sum(-1)^n\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ tedy konverguje absolutně.

o) $\sum(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})}$.

Absolutní konvergence - Raabeovo kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})}}{\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n+1})}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{2}{\sqrt{n+1}} = \infty > 1,$$

tedy řada $\sum(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})...(2+\sqrt{n})}$ konverguje absolutně.