Kapitola 1

Nekonečné číselné řady

Definice 1.1 *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel. Symbol*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad nebo \quad a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

nazýváme nekonečnou číselnou řadou. $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$ *nazveme* n*-tý částečný součet řady a* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost částečných součtů.*

Existuje-li vlastní limita $lim_{n\to\infty} s_n = s$*, řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a má součet* s*.*

Neexistuje-li vlastní limita $lim_{n\to\infty} s_n$*, řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje. Divergentní řady dále dělíme na tři případy:*

- *Je-li* $lim_{n\to\infty} s_n = \infty$*, řekneme, že řada diverguje k* $+\infty$ *a píšeme* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$*,*
- *je-li* $lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$*, řekneme, že řada diverguje k* $-\infty$ *a píšeme* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$*,*
- *jestliže* $lim_{n\to\infty} s_n$ *neexistuje, řekneme, že řada osciluje.*

Příklad 1.1 *Určete, kdy konverguje geometrická řada* $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$*, kde* $a, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *a zjistěte její součet.*

Řešení:

1. *Nechť* $q = 1$*, pak* $s_n = na$ *a tedy* $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ *pro* $a > 0$ *a* $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ *pro* $a < 0$*. Řada je tedy divergentní a diverguje k* $+\infty(-\infty)$ *pro* $a > 0(a < 0)$*.*

2. *Nechť* $q = -1$*, pak* $s_n = 0$ *pro* n *sudé a* $s_n = a$ *pro* n *liché, tedy* $\lim_{n\to\infty} s_n$ *neexistuje. Řada osciluje.*

3. *Nechť* $|q| \neq 1$.

$$s_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1}$$
$$s_n q = aq + aq^2 + ... + aq^n$$
$$s_n - s_n q = s_n(1-q) = a - aq^n = a(1-q^n)$$
$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

- *Pro* $|q| < 1$ *je*
$$lim_{n\to\infty} s_n lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$
řada konverguje a má součet $\frac{a}{1-q}$.
- *Pro* $q > 1$ *je*
$$lim_{n\to\infty} s_n = lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} = \pm\infty,$$
řada diverguje k $\pm\infty$.
- *Pro* $q < -1$ *limita* $lim_{n\to\infty} s_n$ *neexistuje, řada tedy osciluje.*

Definice 1.2 *Řada se nazývá omezená, je-li posloupnost* $\{s_n\}$ *omezená.*

Věta 1.1 *Konvergentní řada je omezená.*

Důkaz

Viz. věta z prvního semestru, má-li posloupnost vlastní limitu, pak je omezená.

$\square$

Poznámka 1.1 *Obrácené tvrzení neplatí. Např. řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *je divergentní (osciluje), ale je omezená.*

Věta 1.2 *Nechť jsou řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní. Pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \gamma b_n)$ *a platí,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \gamma b_n) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \gamma\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důkaz

Důsledek věty o aritmetice limit.

$\square$

Poznámka 1.2 *Konvergentní řady tvoří vektorový prostor.*

Věta 1.3 *(nutná podmínka konvergence) Je-li* $\sum a_n$ *konvergentní, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Důkaz

Sporem. Je-li $lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $m > n_0$ takové, že $|a_m| > \varepsilon$, tedy $|s_m - s_{m-1}| > \varepsilon$ a proto neni posloupnost $\{s_n\}$ Cauchyovská, tedy neni ani konvergentní.

$\square$

Poznámka 1.3 *Obráceně věta neplatí.*

Příklad 1.2 *Vyšetřete konvergenci harmonické řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{i} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + ... + \frac{1}{2^n} \\ &\geq \sum_{n=1}^{n-1} \frac{1}{i} + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{2} \geq \sum_{n=1}^{n-2} \frac{1}{i} + 2 \cdot \frac{1}{2} \geq ... \geq 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

Posloupnost částečných součtů této řady je rostoucí, jelikož $a_n = \frac{1}{n} > 0$, *tedy limita* $\lim_{n\to\infty} s_n$ *existuje. Jelikož je* $s_{2^n} \geq \frac{n+1}{2} \to \infty$, *je tato limita* $+\infty$. *Tedy harmonická řada konverguje k* $+\infty$.

Věta 1.4 *Nechť* $p \in \mathbb{N}$, *pak řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ *současně buď konvergují nebo divergují.*

Důkaz

Označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ a $\hat{s}_n = \sum_{i=p+1}^{n} a_i$, pak $s_n = \sum_{i=1}^{p} a_i + \hat{s}_n$ a jelikož $\sum_{i=1}^{p} a_i \in \mathbb{R}$, tak $\lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{s}_n \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{s}_n \pm \infty$.

$\square$

Poznámka 1.4 *Z předcházející věty plyne, že na konvergenci, resp. divergenci řady nemá vliv chování konečného počtu jejích členů.*

1.1 Řady s nezápornými členy

Je-li $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme řadou s nezápornými členy.

Věta 1.5 *Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada, $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, pak součet této řady existuje.*

- *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neomezená, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.*
- *Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezená, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Důkaz

Přímí dusledek věty z prvního semestru "rostoucí posloupnost má limitu, která je vlastní (rovna $\sup\{a_n\}$), je-li tato posloupnost omezená a je rovna $+\infty$, je-li posloupnost $\{a_n\}$ neomezená.

□

1.1.1 Kritéria konvergence

Věta 1.6 *(srovnávací kritérium) Nechť $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq b_n$, pak platí:*

- *Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_i$, tak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
- *Jestliže diverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Důkaz

Označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ a $\hat{s}_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$, pak $s_n \leq \hat{s}_n$. Jelikož jsou posloupnosti $\{s_n\}$ a $\{\hat{s}_n\}$ neklesající, tak mají limitu. Navíc platí $lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} \hat{s}_n$ [1].

□

Poznámka 1.5 *Předpoklad $a_n \leq b_n$ nemusí platit pro všechna n, ale stačí, aby platil $\forall n > n_0$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Příklad 1.3 *Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.*

[1] věta o nerovnostech a limitách v prvním semestru

Řešení: Jelikož $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$*, a* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$*, tak se stačí zaměřit na konvergenci řady* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *konverguje a tedy konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Věta 1.7 *(limitní srovnávací kritérium) Nechť* $a_n \geq 0$ *a* $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$*. Jestliže* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$*, pak obě řady buď konvergují, nebo obě divergují.*

Důkaz

Označma $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{A}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2A$, $\forall n > n_0$. Tedy $\frac{A}{2} \cdot b_n \leq a_n \leq 2A \cdot a_n$, $\forall n > n_0$ a dál jen využijeme věty 1.6 a 1.2.

□

Příklad 1.4 *Rozhodněte o konvergenci řad:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3n}{n^2}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+3n^2+8\ln n}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$.

Řešení:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2+3n}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 3 \in (0, \infty)$*. Jelikož harmonická řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverguje (viz příklad 1.2), tak diverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3n}{n^2}$.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+3n^2+8\ln n}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in (0, \infty)$*. Jelikož řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *konverguje (viz příklad 1.3), tak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+3n^2+8\ln n}$.

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi \in (0,\infty)$, *tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ *diverguje.*

Věta 1.8 *(Odmocninové kritérium - Cauchyho) Nechť* $\forall n \in \mathbb{N}$ *je* $a_n \geq 0$.

a) *i) Jestliže existuje* $q < 1$ *a* $\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{a_n} \leq q$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konerguje.*

ii) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *pro nekonečně mnoho členů posloupnosti* $\{a_n\}$, *tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

b) Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$, *pak:*

i) Je-li $q < 1$, *tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

ii) Je-li $q > 1$, *tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz

a) i) Je-li $q < 1$ a $\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak $a_n \leq q^n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a jelikož geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje (viz. příklad 1.1), tak konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dle věty 1.6.

ii) Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, tak $\lim_{n\to} a_n \neq 0$ a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje (viz. věta 1.3).

b) Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \mathbb{R}^*$, pak:

i) Je-li $q < 1$, zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $q + \varepsilon < 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon$ pro všechna $n > n_0$. Dále postupujeme stejně jako v části a) i).

ii) Je-li $q > 1$, tak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n > 1$ $\forall n > n_0$. Dále viz. a) ii).

$\square$

Příklad 1.5 *Rozhodněte o konvergenci řad:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Řešení:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

proto řada konverguje.

b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{\pi}\text{arccos}\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi}\text{arccos}\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{2}{\pi}\text{arccos}\frac{1}{n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\text{arccos}\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}$$

$$\stackrel{L'H}{=} e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\text{arccos}\frac{1}{n}}\cdot\frac{-2}{\pi\sqrt{1-1/n^2}}\cdot\frac{-1}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}}} = e^{\frac{-2}{\pi}} < 1,$$

tedy řada konverguje.

Věta 1.9 *(Podílové kritérium - d'Alembertovo) Nechť* $a_n \geq 0$.

i) Jeli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje. Platí-li pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *nerovnost* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

ii) Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, *pak:*

- *je-li* $q < 1$, *tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*
- *je-li* $q > 1$, *tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz

i) Jelikož $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, tak $a_{n+1} \leq a_n q$, tedy indukcí dokážeme, že $a_n \leq a_1 q^{n-1}$. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ je konvergentní geometrická řada ($|q| < 1$), tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje dle věty 1.6. Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, tak $a_{n+1} \geq a_1$ a jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1$ diverguje[2], tak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii)
- Je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, tak existuje $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon < 1$ pro všechna $n > n_0$. Označme $\hat{q} = q+\varepsilon$ a postupujme dále jako v první části důkazu, tedy dostaneme $a_{n+1} \leq a_n \hat{q}$ pro všechna $n > n_0$ a proto $a_{n_0+k} \leq a_{n_0}\hat{q}^k \ \forall k \in \mathbb{N}$. Jelikož je $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_0+n}\hat{q}^n$ konvergentní geometrická řada, tak je i $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergentní dle věty 1.6 a tedy je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dle věty 1.4.

[2] $a_1 > 0$, jelikož výraz $\frac{a_2}{a_1}$ má smysl z předpokladu věty, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

– Je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, tak existuje $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $1 < q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ pro všechna $n > n_0$, tedy $a_{n_0+k} > a_{n_0}$ $\forall n > n_0$. Dále postupujeme jako v předchozích částech důkazu.

$\square$

Příklad 1.6 *Rozhodněte o konvergenci řad:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-7)2^n}{n!}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Řešení:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n-5)2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(2n-7)2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-5)2}{(2n-7)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-10}{2n^2-7n} = 0 < 1,$$

tedy řada konverguje.

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1,$$

tedy řada diverguje.

Poznámka 1.6 *V situaci, kdy* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$*, kritérium "mlčí". Tato situace může nastat jak pro konvergentní řadu (viz. příklad 1.3), tak pro divergentní řadu (viz. příklad 1.2).*

Věta 1.10 *(Raabeovo kritérium) Nechť* $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) Je-li $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$*, tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

ii) Je-li $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$*, tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz

i) Nechť $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, pak existuje $\varepsilon > 0$ a n_0 takové, že $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 + \varepsilon$ pro všechna $n > n_0$. Dostaneme tedy:

$$\begin{aligned} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &> 1 + \varepsilon, \\ n(a_n - a_{n+1}) &> a_{n+1} + \varepsilon a_{n+1}, \\ na_n - (n+1)a_{n+1} &> \varepsilon a_{n+1}, \\ \frac{1}{\varepsilon}(na_n - (n+1)a_{n+1}) &> a_{n+1}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i &< a_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{\varepsilon}((i-1)a_{i-1} - ia_i)\right) \\ &= a_1 + \frac{1}{\varepsilon}(a_1 - 2a_2 + 2a_2 - 3a_3 + ... + (n-1)a_{n-1} - na_n) \\ &= a_1 + \frac{1}{\varepsilon}(a_1 - na_n) \le a_1 + \frac{1}{\varepsilon}a_1. \end{aligned}$$

Jelikož posloupnost $\{s_n\}$ je neklesající a omezená, je také konvergentní. Proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

ii) Je-li $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, tak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ pro všechna $n > n_0$. Pak

$$\begin{aligned} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &< 1 \\ na_n - na_{n+1} &< a_{n+1} \\ na_n &< (n+1)a_{n+1}. \end{aligned}$$

Dostáváme $(n_0+1)a_{n_0+1} < (n_0+2)a_{n_0+2} < ... < na_n$ a tedy $a_n > \frac{1}{n}(n_0+1)a_{n_0+1}$. Proto

$$\sum_{i=n_0+1}^{n} a_i > \sum_{i=n_0+1}^{n} \frac{1}{i}(n_0+1)a_{n_0+1} = (n_0+1)a_{n_0+1} \sum_{i=n_0+1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Z divergence harmonické řady (viz. příklad 1.2) a věty 1.6 plyne divergence řady $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ a tedy i divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (dle věty 1.4).

□

Poznámka 1.7 *Někdy se Raabeovo kritérium uvádí ve tvaru*[3]

- $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$ ... *řada konverguje,*
- $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$ ... *řada diverguje.*

Příklad 1.7 *Rozhodněte o konvergenci řady:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)},$$

kde $a > 0$.

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}}{\frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)...(a+n)(a+n+1)}} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{a}{n+1} = a.$$

Je-li tedy $a > 1$, *tak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pro* $a \in (0,1)$ *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje. Pro* $a = 1$ *dostaneme řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, *což je harmonická řada bez prvního členu a tedy řada divergentní.*

Poznamenejme, že v této úloze by nám nepomohlo d'Alembertovo kritérium, jelikož $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Příklad 1.8 *Rozhodněte o konvergenci řady:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}}{n^{\alpha}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha}\left(e^{\alpha\ln(n+1)} - e^{\alpha\ln n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha}\cdot e^{\alpha\ln n}\left(e^{\alpha(\ln(n+1)-\ln n)} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\frac{e^{\alpha(\ln(1+\frac{1}{n}))} - 1}{\alpha(\ln(1+\frac{1}{n}))}\cdot\frac{\alpha(\ln(1+\frac{1}{n}))}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \alpha.$$

[3] zne uvedeno bez předpokladů, kleré jsou ale stejné jako v výše uvedené verzi tohoto kritéria

Tedy pro $\alpha > 1$ řada konverguje a pro $\alpha < 1$ řada diverguje.

Věta 1.11 *(Integrální kritérium) Nechť je funkce f nerostoucí, nezáporná a definovaná na intervalu $[1, \infty)$. Pokud $a_n = f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$.*

Důkaz

f je nerostoucí, tedy $f(n-1) \geq f(x) \geq f(n)$ $\forall x \in [n-1, n]$. Dále dostaneme

$$
\begin{aligned}
f(n-1) = \int_{n-1}^{n} f(n-1)dx \geq \int_{n-1}^{n} f(x)dx & \geq \int_{n-1}^{n} f(n)dx = f(n) \\
\sum_{n=2}^{k} f(n-1) \geq \sum_{n=2}^{k} \int_{n-1}^{n} f(x)dx & \geq \sum_{n=2}^{k} f(n) \\
\sum_{n=1}^{k} f(n) \geq \int_{1}^{k} f(x)dx & \geq \sum_{n=2}^{k} f(n) \\
\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f(n) \geq \lim_{k\to\infty} \int_{1}^{k} f(x)dx & \geq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} f(n) \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_{1}^{\infty} f(x)dx & \geq \sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n.
\end{aligned}
$$

Z první nerovnosti dostaneme: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (konvergnentní) $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$. Z druhé nerovnosti dostaneme: $\int_1^{\infty} f(x)dx < \infty \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n < \infty$ a tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

□

Příklad 1.9 *Rozhodněte o konvergenci řady:*

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

kde $\alpha \neq 1$.

Řešení: Zavedeme funkci $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, pak funkce f splňuje pro $\alpha > 0$ podmínky věty 1.11. Dostaneme

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} x^{-\alpha}dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

tedy $\int_1^\infty f(x)dx = -\frac{1}{1-\alpha}$ *pro* $\alpha > 1$ *a* $\int_1^\infty f(x)dx = \infty$ *pro* $\alpha \in (0,1)$.

Jelikož řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ *diverguje pro* $\alpha = 1$ *(jde o harmonickou řadu viz. příklad 1.2) a pro* $\alpha \leq 0$ *je* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} \neq 0$[4]*, tak dostáváme, že řada* $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ *konverguje pro* $\alpha > 1$ *a diverguje pro* $\alpha \leq 1$.

1.2 Řady s obecnými členy

Věta 1.12 *(Bolzano-Cauchyova podmínka) Řada* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *konverguje právě tehdy, když* $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : |s_{n+p} - s_n| = |\sum_{i=1}^p a_{n+i}| < \varepsilon$.

Důkaz Jde o přímý důsledek definice a Bolzano-Cauchyho věty pro posloupnosti.

□

Věta 1.13 *Je-li řada* $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ *konvergentní, tak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Důkaz Je-li řada $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$, tak dle předchozí věty 1.12 platí: $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall p \in \mathbb{N} : |\sum_{i=1}^p a_{n+i}| \leq |\sum_{i=1}^p |a_{n+i}|| < \varepsilon$. Tedy i řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ splňuje BC podmínku a je také konvergentní.

□

Definice 1.3 *Řekneme, že řada* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *konverguje absolutně, jestliže konverguje řada* $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$. *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *konverguje, ale řada* $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ *diverguje, říkáme že řada* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *konverguje relativně.*

Příklad 1.10 *Rozhodněte o konvergenci řad:*

a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$,

b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Řešení:

a) Jelikož řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|$ *konverguje (příklad 1.3), tak konverguje i řada* $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ *(dle věty 1.13) a tedy řada konverduje absolutně.*

[4] neni splněna nutná podmínka konvergence viz. věta 1.3

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *je harmonická řada, o které víme, že je divergentní. Musíme tedy zkoumat konvergenci přímo řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + ... + \frac{1}{(n-1)n} < \sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i(i+1)}. \end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ *je konvergentní (viz. příklad 1.3) a tedy je limita* $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i(i+1)}$ *konečná a proto je konečná i limita* $\lim_{n\to\infty} s_{2n}$. *Označme* $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = A \in \mathbb{R}$, *pak* $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = A$ *a tedy je* $\lim_{n\to\infty} s_n = A \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *je konvergentní, tj. řada* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *konverguje relativně.*

Věta 1.14 *(Leibnitzovo kritérium) Nechť pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí:*

I. $a_n \geq 0$,

II. $a_{n+1} \leq a_n$,

III. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *konverguje.*

Důkaz $s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n}$, tedy je posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající.

Jelikož

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - ... - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5)... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1, \end{aligned}$$

je navíc posloupnopst $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ omezená a tedy konvergentní. Označme $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = A \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = A,$$

tedy je posloupnost $\{s_n\}$ konvergentní a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konverguje. □

Příklad 1.11 *Vraťme se k řadě* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. *Využijeme-li Leibnitzovo kritérium, tak* $I.\frac{1}{n} > 0$, $II.\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ *a* $III.\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, *tedy řada* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *konverguje.*

Lemma 1.15 *Mějme posloupnopsti* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *a čísla* $n, p \in \mathbb{N}$, $n < p$. *Označme* $\beta_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$. *Pak*

$$\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{p} \beta_k (a_k - a_{k+1}) + \beta_p a_{p+1} - \beta_n a_{n+1}. \tag{1.1}$$

Důkaz

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^{p} a_k (\beta_k - \beta_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{p} a_k \beta_k - \sum_{k=n+1}^{p} a_k \beta_{k-1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{p} a_k \beta_k - \sum_{k=n}^{p-1} a_{k+1} \beta_k = \sum_{k=n+1}^{p} a_k \beta_k - \left(a_{n+1}\beta_n - a_{p+1}\beta_p + \sum_{k=n+1}^{p} a_{k+1}\beta_k \right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{p} \beta_k (a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}\beta_p - a_{n+1}\beta_n.
\end{aligned}$$

□

Věta 1.16 *(Abelovo-Dirichletovo kritérium) Nechť* $\{a_n\}$ *je monotonní posloupnost a platí jedna z následujících podmínek:*

1. *(Dirichlet)* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *má omezené částečné součty.*
2. *(Abel) Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentní a posloupnost* $\{a_n\}$ *je omezená.*

Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konvergentní.*

Důkaz

1. Použijeme B-C podmínku (věta 1.12) a předchozí lemma. Stejně jako v přechozím lemmatu používáme značení $\beta_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$. Jelikož má řada $\sum b_n$ omezené částečné součty, tak existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|\beta_k| < M$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

BÚNO předpokládáme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{p} \beta_k(a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}\beta_p - a_{n+1}\beta_n\right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{p} |\beta_k(a_k - a_{k+1})| + |a_{p+1}\beta_p - a_{n+1}\beta_n| \\
&= \sum_{k=n+1}^{p} |\beta_k|(a_k - a_{k+1}) + |a_{p+1}\beta_p - a_{n+1}\beta_n| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{p} M(a_k - a_{k+1}) + |a_{p+1}\beta_p| + |a_{n+1}\beta_n| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{p} M(a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}M + a_{n+1}M \\
&= M(a_{n+1} - a_{p+1} + a_{p+1} + a_{n+1}) = 2Ma_{n+1}.
\end{aligned}$$

Jelikož $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pak pro každé $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ platí $a_n < \varepsilon$. Tedy pro $n_0 < n < p$ platí:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k\right| < 2M\varepsilon,$$

a proto je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní (dle věty 1.12).

2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, označme tedy její součet $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Z rovnosti $\sum_{k=n+1}^{p}(a_k - a_{k+1}) = a_{n+1} - a_{p+1}$ dostaneme rovnost

$$0 = \sum_{k=n+1}^{p} \beta(a_k - a_{k+1}) + \beta a_{p+1} - \beta a_{n+1}.$$

Pak

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{p} \beta_k(a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}\beta_p - a_{n+1}\beta_n\right| \\ &= \left|\sum_{k=n+1}^{p} (\beta_k - \beta)(a_k - a_{k+1}) + a_{p+1}(\beta_p - \beta) - a_{n+1}(\beta_n - \beta)\right| \\ &\le \left|\sum_{k=n+1}^{p} |(\beta_k - \beta)|(a_k - a_{k+1})\right| + |a_{p+1}(\beta_p - \beta) - a_{n+1}(\beta_n - \beta)| \\ &\le \left|\sum_{k=n+1}^{p} |(\beta_k - \beta)|(a_k - a_{k+1})\right| + |a_{p+1}| \cdot |\beta_p - \beta| + |a_{n+1}| \cdot |\beta_n - \beta|.\end{aligned}$$

Jelikož je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, tak pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\beta - \beta_k| < \varepsilon$ pro všechna $k > n_0$. Jelikož je posloupnost $\{a_n\}$ omezená, tak existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|a_n| < M$. Tedy pro $n, p > n_0$ dostaneme

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{p} a_k b_k\right| &\le \left|\sum_{k=n+1}^{p} |(\beta_k - \beta)|(a_k - a_{k+1})\right| + |a_{p+1}| \cdot |\beta_p - \beta| + |a_{n+1}| \cdot |\beta_n - \beta| \\ &< \left|\sum_{k=n+1}^{p} \varepsilon(a_k - a_{k+1})\right| + \varepsilon|a_{p+1}| + \varepsilon|a_{n+1}| \\ &\le \varepsilon(|a_{n+1} - a_{p+1}| + |a_{p+1}| + |a_{n+1}|) \le 2\varepsilon(|a_{p+1}| + |a_{n+1}|) < 4\varepsilon M.\end{aligned}$$

Proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje (dle věty 1.12).

□

Příklad 1.12 *Nechť $a_n > 0$, $\{a_n\}$ je nerostoucí a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ukažme, že pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ konvergují.*

Nejdříve ukážeme, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ mají pro $x \neq 2\pi l$ omezené částečné součty. Mějme geometrickou řadu s kvocientem $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Pak $s_n = \sum_{i=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}$, tedy

$$\begin{aligned}|s_n| &= \left|e^{ix}\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\right| = |e^{ix}|\frac{|1 - e^{inx}|}{|1 - e^{ix}|} \le \frac{2}{|1 - e^{ix}|} = \frac{2|1 - e^{-ix}|}{|(1 - e^{ix})(1 - e^{-ix})|} \\ &\le \frac{4}{|2 - e^{ix} - e^{-ix}|}] = \frac{2}{|1 - \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}|} = \frac{2}{|1 - \cos(x)|}.\end{aligned}$$

Je-li $x \neq 2k\pi$, tak $|s_n| \leq \frac{2}{|1-\cos(x)|} < \infty$. Jelikož $s_n = \sum_{k=1}^n \cos(kx) + \sum_{k=1}^n \sin(kx)$, tak $|\sum_{k=1}^n \cos(kx)| \leq |s_n|$ a $|\sum_{k=1}^n \sin(kx)| \leq |s_n|$, tedy řady $\sum_{n=1}^\infty a_n \sin(nx)$ a $\sum_{n=1}^\infty a_n \cos(nx)$ mají pro $x \neq 2\pi l$ omezené částečné součty.

Dále už jen stačí aplikovat Dirichletovo kritérium.

Speciálně řady $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nx)}{n}$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(nx)}{n}$ pro $x \neq 2\pi$ konvergují, ale nejsou absolutně konvergentní.

1.2.1 Přerovnávání řad

Definice 1.4 *Nechť $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je řada a $\{k_n\}$ je permutace množiny $\mathbb{N}$ ($\{k_n\}$ je prostá posloupnost přirozených čísel, v níž se každé přirozené číslo vyskytuje). Pak říkáme, ža $\sum_{n=1}^\infty a_{k_n}$ vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$.*

Věta 1.17 *Nechť řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně i řada $\sum_{n=1}^\infty a_{k_n}$, která vznikla přerovnáním této řady a jejich součet je stejný (tj. $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty a_{k_n}$).*

Důkaz

Mějme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n| + |a_{n+1}| + ... + |a_p| < \varepsilon$ pro každé $p > n \geq n_0$ (viz. věta 1.12). Jelikož $\{k_n\}$ je permutace množiny $\mathbb{N}$, tak existuje $\hat{n}_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\{1, 2, ..., n_0\} \subset \{k_1, k_2, ..., k_{\hat{n}_0}\}$. Je-li $\hat{p} > \hat{n} > \hat{n}_0$ a označme $p = \max\{k_{\hat{n}}, k_{\hat{n}+1}, ..., k_{\hat{p}}\}$, pak $|a_{k_{\hat{n}}}| + |a_{k_{\hat{n}+1}}| + ... + |a_{k_{\hat{p}}}| \leq |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + ... + |a_p| < \varepsilon$, tedy je řada $\sum_{n=1}^\infty a_{k_n}$ absolutně konvergentní.

Nyní dokážeme, že $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty a_{k_n}$. Nechť $n > \max\{n_0, \hat{n}_0\}$a označme $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ a $\hat{s}_n = \sum_{i=1}^n a_{k_i}$. pak

$$
\begin{aligned}
|s_n - \hat{s}_n| &= |a_1 + a_2 + ... + a_n - (a_{k_1} + a_{k_2} + ... + a_{k_n})| \\
&\leq |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + ... + |a_q| < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

kde $q = \max\{n, k_1, ..., k_n\}$. Tedy $\lim_{n\to\infty} |s_n - \hat{s}_n| = 0$ a proto

$$
\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \hat{s}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}.
$$

□

Označme $a^+ = \max\{0, a\}$ a $a^- = \max\{0, -a\}$. Pak $a = a^+ - a^-$ a $|a| = a^+ + a^-$. Je-li $\sum_{n=1}^\infty a_n$ nekonečné řada, tak můžeme uvažovat dvě nekonečné řady s nezápornými členy $\sum_{n=1}^\infty a_n^+$ a $\sum_{n=1}^\infty a_n^-$.

Lemma 1.18 *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně, pak obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergují k $+\infty$.*

Důkaz

Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ jsou řady s nezápornými koeficienty, tak každá z těchto řed buď konverguje, nebo diverguje k $+\infty$.

Kdyby obě konvergovaly, pak by konvergovala i řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^+ + a_n^-)$ (věta 1.2) a tedy by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala absolutně.

Pokud by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konvergovala a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergovala k $+\infty$, pak by $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \lim_{n\to\infty} s_n^+ = A \in \mathbb{R}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \lim_{n\to\infty} s_n^- = +\infty$. Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $K \in \mathbb{R}$ by existovalo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $A - \varepsilon < s_n^+ < A + \varepsilon$ a $s_n^- > K$ $\forall n > n_0$. Tedy

$$s_n = s_n^+ - s_n^- < A - K + \varepsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Proto by

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s_n^+ - s_n^-) = -\infty.$$

Tedy by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergovala. Stejně by se ukázalo, že pro konvergentní řadu nemůže nastat aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ divergovala k $+\infty$ a 5ada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergovala.

Proto obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergují k $+\infty$.

$\square$

Věta 1.19 *(Riemannova) Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje relativně a nechť $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje takové přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$ a takové přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$ osciluje.*

Důkaz

- Nechť je $s \in \mathbb{R}$. Označme n_1 nejmenší $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_1} a_i^+ > s$ (jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$, tak takové n_1 existuje). Označme m_1 nejmenší $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_1} a_i^+ - \sum_{i=1}^{m_1} a_i^- < s$. Dále pro $k = 2, 3, ...$ označme n_k nejmenší $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_k} a_i^+ - \sum_{i=1}^{m_{k-1}} a_i^- > s$ a m_k nejmenší $m_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=1}^{n_k} a_k^+ - \sum_{i=1}^{m_k} < s$. Tato konstrukce nám vytvoří řadu

  $$a_1^+ + +... + a_{n_1}^+ - (a_1^- + ... + a_{m_1}^-) + a_{n_1+1}^+ + ... + a_{n_2}^+ - (a_{m_1+1}^- + ...) + ...,$$

  která vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Označme $\hat{s}_n$ součet takto přerovnané řady, pak částečný součet $\hat{s}_{n_1+m_1+...+n_k}$ se od s liší maximálně o $a_{n_k}^+$ a částečný součet $s_{n_1+m_1+...+m_k}$ se od s liší maximálně o $a_{m_k}^-$. Podobně částečný součet $\hat{s}_n$, kde $n_1 + m_1 + ... + n_k < n < n_1 + m_1 + ... + m_k$ se od s liší maximálně o $\max\{a^+_{n_k}, a^-_{m_k}\}$ a obdobně pro $n_1 + m_1 + ... + m_k < n < n_1 + m_1 + ... + n_{k+1}$ je $|s_n - s| \leq \max\{a^+_{n_{k+1}}, a^-_{m_k}\}$. Jelikož řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a proto je $\lim_{n\to\infty} \hat{s}_n = s$.

- Ukažme, že lze řadu přerovnat tak, aby $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \infty$. Stačí třeba zvolit náslkedující přerovnání. $n_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší n_1 takové, že $a^+_1 + ... + a^+_{n_1} > 1$. $n_2 > n_1$ je nejmenší n_2 takové, že $a^+_1 + ... + a^+_{n+1} - a^-_1 + a^+_{n_1+1} + ... + a^+_{n_2} > 2$, $n_3 > n_2$ je nejmenší takové, že $a^+_1 + ... + a^+_{n+1} - a^-_1 + a^+_{n_1+1} + ... + a^+_{n_2} - a^-_2 + a^+_{n_2+1} + ... + a^+_{n_3} > 3$ a tak dál. Dále postupujeme jak v předchozí části důkazu.

- Pro přerovnávání do oscilující řady stačí, aby n_1 bylo nejmenší takové, že $a^+_1 + ... + a^+_{n_1} > 1$, m_1 nejmenší takové, že $a^+_1 + ... + a^+_{n_1} - (a^-_1 + ... + a^-_{m_1}) < -1$, $n_2 > n_1$ nejmenší takové, že $a^+_1 + ... + a^+_{n_1} - (a^-_1 + ... + a^-_{m_1}) + a^+_{n_1+1} + ... + a^2_{n_2} > 1$ a tak dále.

$\square$